F 2992

CATEDRA DE CIBERNETICĂ ECONOMICĂ
ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE
BUCUREŞTI

STUDII ŞI CERCETĂRI DE CALCUL ECONOMIC ŞI CIBERNETICĂ ECONOMICĂ

1

1977

GRÓZ ÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRES
DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

CATEDRA DE CIBERNETICĂ ECONOMICĂ
ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE
BUCUREŞTI

STUDII ŞI CERCETĂRI DE CALCUL ECONOMIC ŞI CIBERNETICĂ ECONOMICĂ

1 1977

Calea Dorobanţilor 15—17

Tel. 12.77.08

SUMAR

C. V. NEGOIȚĂ, P. FLONDOR, M. SULARIA
Asupra optimizării în condiții vagi 3

G. THEILER, L. TÖVISSI
Repartiții inițiale corespunzătoare legilor limită ale valorilor extremale 15

C. BARON
Funcții de structură și rețele de fiabilitate 39

GH. BOLDUR, C. RAȚIU SUCIU, M. STOICA, C. HARTULARI
Aspecte statice și dinamice ale problemei stabilirii ritmului de fabricație 51

C. HÂRTU
Simularea unui model de creștere economică cu parametri aleatori 61

I. VĂDUVA, V. BALTAC, V. FLORESCU, I. FLORICICĂ
Raționalizarea activității de programare 75

În ajutorul celor ce doresc să susțină concursul de admitere la facultățile A.S.E.

Informații științifice

Critică și bibliografie

C. V. NEGOIȚA
P. FLONDOR
M. SULARIA
Institutul central pentru conducere și informatică

Asupra optimizării în condiții vagi

Lucrarea tratează cîteva aspecte legate de surprinderea impreciziei în problemele de optimizare. Imprecizia se presupune a fi modelată prin mulțimi fuzzy.

O problemă este aceea a programării liniare cu coeficienți mulțimi fuzzy definită ca o extensie naturală a programării liniare cu restricții de tip incluziune.

În continuare sînt tratate două probleme legate de optimizarea cu mai multe criterii avînd în vedere o nuanțare pe mulțimea criteriilor și o problemă de selecție a unui punct de maxim Pareto după criterii definite prin mulțimi fuzzy.

Scopul acestei lucrări este de a trata problemele de decizie în care obiectivele și restricțiile nu sînt formulate precis. Dorim să putem identifica astfel de probleme, să caracterizăm proprietățile soluțiilor lor și, pe măsura posibilităților, să elaborăm tehnici pentru rezolvarea lor.

În ultimul timp s-a observat un interes crescînd pentru modele care să reprezinte mai bine situațiile reale întîlnite în procesul de luare a deciziilor [1].

Prin proces de decizie vom înțelege aici o mulțime de alternative presupuse a fi la dispoziția unei alegeri libere, o mulțime de restricții asupra acestei alegeri și o funcție obiectiv care permite decidentului să ordoneze alternativele.

Decizia în condiții de certitudine are proprietatea că o anumită alegere conduce invariabil la o valoare specificată a funcției obiectiv. Aceasta înseamnă că nu există dificultate în modul de explicare al preferințelor relativ la un rezultat, adică fiecare decident este în posesia unui set de obiective clar formulate pe baza cărora este în stare să-și determine preferințele.

Dacă vom considera situațiile reale de decizie putem să nu fim satisfăcuți de această definiție. Este știut că în realitate decidentul folosește expresii ca „z trebuie să fie în vecinătatea lui $\tilde{z}$“, care nu este un obiectiv clar for-

mulat. Expresia „... în vecinătatea ..." poate fi modelată cu o submulțime fuzzy, adică o funcție $A : X \to L$ unde L este o latice. Un mediu fuzzy poate fi văzut, astfel, ca o mulțime X a alternativelor împreună cu submulțimile sale fuzzy, reprezentînd criterii formulate ambiguu (restricții și obiective), adică un sistem $(X, A_1, ..., A_n, L)$.

Luarea în considerare a tuturor criteriilor, cît se poate mai bine, înseamnă să construim o funcție $D = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$. Optimul înseamnă acea parte a lui X care maximizează D [2].

Ținînd seama de faptul că restricțiile și obiectivele pot fi tratate la fel în formularea unei decizii sîntem gata să extindem principiul confluenței și să definim un mediu fuzzy ca obiectul matematic (X, D, L).

Acest mod de a gîndi sugerează definirea deciziei ca o submulțime fuzzy a mulțimii alternativelor. Prin decizie optimă înțelegem un punct $x_0 \in X$ (dacă există) care satisface $D(x^\circ) = \sup_{x \in X} D(x)$.

Remarcăm că orice problemă de programare fuzzy este o problemă de optimizare cu mai multe criterii și că corespondența $(X, A_1 A_2, ..., A_n, L) \to x_0$ este o notare compactă a problemei generale de programare descrisă mai înainte ca asociind fiecărei familii de obiective și restricții o submulțime a mulțimii alternativelor numită mulțime optimă.

În această lucrare vom elabora un cadru matematic în care să putem trata mediul fuzzy și să obținem rezultate care să ne permită să rezolvăm probleme de programare într-un astfel de mediu.

În multe cazuri, chiar dacă structura deterministă a deciziei corespunde situației reale, decidentul nu poate evalua în mod sistematic consecințele ce decurg din imprecizia datelor. Incercarea de a formaliza problema de decizie de acest tip ne obligă să considerăm toleranțe asupra parametrilor [3], [4]. O toleranță văzută, de exemplu, ca un interval de variație poate fi descrisă de o mulțime fuzzy. Acesta este cazul programării liniare cu restricții fuzzy.

În mai multe probleme reale compararea între alternative trebuie făcută pe baza mai multor funcții obiectiv. Acestea pot fi ordonate conform unei preferințe externe. Acesta este cazul confluenței ponderate în programarea fuzzy.

În final se consideră confluența ponderată împreună cu toleranțele.

PRELIMINARII

Fie X o mulțime și L intervalul unitate. O submulțime fuzzy a lui X este o funcție $A : X \to L$. Spunem că X este purtătorul lui A, L este mulțimea valorilor de adevăr și $A(x)$ este gradul de apartenență al lui x la A.

Dacă A și B sînt submulțimi fuzzy ale lui X atunci intersecția lor notată $A \cap B$ este dată de

$$(A \cap B)\ (x) = A(x) \wedge B(x)$$

iar reuniunea lor, notată cu $A \cup B$ este dată de

$$(A \cup B)\,(x) = A(x) \vee B(x)$$

pentru toți x din X.

Notînd $F(X)$ mulțimea $\{A/A : X \to L\}$ observăm că structura lui L induce aceeași structură pe $F(X)$. Dacă $A, B \in F(X)$ spunem că A este inclus

în B dacă $A(x) \leqslant B(x)$ pentru toți $x \in X$. Dacă $A \in F(X)$, $r \in L$ atunci r — nivelul slab a lui A este mulțimea

$$\omega_r(A) = \{x \in X \mid A(x) \geqslant r\}$$

iar r — nivelul tare a lui A este mulțimea

$$\sigma_r(A) = \{x \in X \mid A(x) > r\}.$$

Din definițiile precedente se arată ușor că nivelele posedă următoarele proprietăți:

$$\omega_0(A) = X \qquad \sigma_0(A) = \sup A,\ \sigma_1(A) = \emptyset \tag{1}$$

$$r_1 \leqslant r_2 \Rightarrow \omega_{r_2}(A) \subseteq \omega_{r_1}(A) \qquad r_1 \leqslant r_2 \Rightarrow \sigma_{r_2}(A) \subseteq \sigma_{r_1}(A) \tag{2}$$

$$\omega_r(A \cup B) = \omega_r(A) \cup \omega_r(B) \qquad \sigma_r(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i \sigma_r(A_i) \tag{3}$$

$$\omega_r(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i \omega_r(A_i) \qquad \sigma_r(A \cap B) = \sigma_r(A) \cap \sigma_r(B) \tag{4}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \omega_r(A) \subseteq \omega_r(B),\ \forall r \qquad A \subseteq B \Leftrightarrow \sigma_r(A) \subseteq \sigma_r(B)\ \forall r \tag{5}$$

2.1. O teoremă de reprezentare a submulțimilor fuzzy

Fie $A \in F(X)$, $r < 1$. Atunci $\forall x \in \sigma_r(A)$, deoarece $A(x) > r$, există $r' > r$ astfel ca $A(x) > r'$ adică $x \in \sigma_{r'}(A)$.

Să considerăm o aplicație

$$f : [0,1] \to \mathfrak{P}(x)$$

unde $\mathfrak{P}(x)$ este mulțimea părților lui X, cu următoarele proprietăți:

(a) $f(1) = \emptyset$

(b) $r_1 \leqslant r_2 \Rightarrow f(r_2) \subseteq f(r_1)$

(c) $x \in f(r) \Rightarrow \exists\, r' > r$, cu $x \in f(r')$.

Sîntem pregătiți acum să evaluăm nivelele tari ale lui A cu următoarea:

Teoremă [5]: Există o bijecție $\mathfrak{F}$ între mulțimea

$\{f/f : [0,1] \to \mathfrak{P}(x),\ f$ cu $(a), (b), (c)\}$ și mulțimea $F(X)$, astfel că $f(r)$ este r — nivelul tare al lui $\mathfrak{F}(f)$.

Demonstrație. Definim $\mathfrak{F}(f) : X \to L$ prin

$$\mathfrak{F}(f)(x) = \begin{cases} \sup\{r/x \in f(r)\}, & \text{pentru } x \in f(0) \\ 0 & \text{, în caz contrar.} \end{cases}$$

Să arătăm că $f(r) = \sigma_r(\mathfrak{F}(f))$.

Fie $x \in \sigma_r(\mathfrak{F}(f))$. Atunci $\mathfrak{F}(f)(x) > r$ și astfel există $r' > r$ astfel încît $x \in f(r')$. Deoarece $f(r') \subseteq f(r)$ avem $x \in f(r)$ adică $\sigma_r(\mathfrak{F}(f)) \subseteq f(r)$. Invers, fie $x \in f(r)$. Atunci, conform proprietății (c), există $r' > r$ astfel că $x \in f(r')$. Deci $\mathfrak{F}(f)(x) \geqslant r' > r$ ceea ce arată că $f(r) \subseteq \sigma_r(\mathfrak{F}(f))$.

Pentru a dovedi injectivitatea, presupunem că $\mathfrak{F}(f_1) = \mathfrak{F}(f_2)$. Rezultă, $\sigma_r(\mathfrak{F}(f)) = \sigma_r(\mathfrak{F}(f_2))$ sau $f_1(r) = f_2(r)$, $\forall\, r$, adică $f_1 = f_2$.

2.2. Submulțimi fuzzy în spații vectoriale

Purtătorul X, definit în paragraful precedent, este o mulțime fără structură. Noi sîntem însă interesați în mulțimi cu structură, cum sînt mulțimile de puncte de pe dreaptă sau din plan.

Dacă considerăm o structură de spațiu vectorial pe purtătorul submulțimilor fuzzy, dorim să definim operații cu aceste submulțimi fuzzy. Vom extinde operațiile de adunare și înmulțire cu scalar la $F(E)$, unde E este un spațiu vectorial.

Înainte de a face aceasta vom reaminti cîteva proprietăți ale mulțimilor fuzzy.

Dacă $f : X \to Y$ este o aplicație și $A \in F(X)$ atunci imaginea lui A prin f este submulțimea fuzzy $f(A) : Y \to L$ dată de:

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} A(x) & , \text{ dacă } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Dacă $A \in F(X)$ și $B \in F(Y)$, atunci $A \times B \in F(X \times Y)$ dată prin

$$(A \times B)(x, y) = A(x) \wedge B(y)$$

se numește produsul submulțimilor fuzzy A și B.

Definim adunarea și înmulțirea cu scalar în $F(E)$ în modul următor:

1) Dacă $A, B \in F(E)$, suma submulțimilor fuzzy A și B este o submulțime fuzzy a lui E dată de imaginea produsului cartezian $A \times B$ prin adunare.

2) dacă $A \in F(E)$, atunci produsul lui A cu un scalar $\lambda \in \mathbf{R}$ este un unic element al lui $F(E)$, notat λA și dat de imaginea lui A prin aplicația $x \to \lambda x$.

Definiția 1. Un subspațiu vectorial fuzzy a lui E este o submulțime fuzzy $A \in F(E)$ cu următoarele proprietăți:

(i) $A(x_1 + x_2) \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2), \quad x_1, x_2 \in E$

(ii) $A(\lambda x) \geqslant A(x), \qquad A \in \mathbf{R}, \quad x \in E.$

Propoziția 1. $A \in F(E)$ este un subspațiu vectorial fuzzy al lui E dacă și numai dacă nivelele $\sigma_r(A)$ sînt subspații vectoriale ale lui E pentru toți $r \in [0, 1]$.

Demonstrație. Presupunem că A este un subspațiu vectorial fuzzy al lui E. Din condiția (ii) rezultă $A(0) \geqslant A(x)$, $\forall x \in E$ adică $A(0) = \sup\limits_{x \in E} A(x)$. Astfel, $\forall r \geqslant A(0)$, $\sigma_r(A) = \emptyset$. Evident $\forall r < A(0)$, $\sigma_r(A)$ este un subspațiu vectorial.

Definiția 2. O submulțime fuzzy $A \in F(E)$ se numește convexă dacă pentru fiecare $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2)$.

Exemplu: Orice subspațiu vectorial fuzzy al lui E este convex, deoarece

$$A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geqslant A(\lambda x_1) \wedge A[(1 - \lambda) x_2] \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2).$$

Propoziția 2. $A \in F(E)$ este convexă dacă și numai dacă $\sigma_r(A)$ este convexă pentru toți $r \in [0,1]$.

Demonstrația este imediată.

Propoziția 3. Orice intersecție de subspații vectoriale fuzzy (submulțimi fuzzy convexe) este un subspațiu vectorial fuzzy (submulțime convexă)

Demonstrația reiese din definiție.

Propoziția 4. Fie $A, B \in F(E)$ și $r \in [0, 1)$. Atunci

(i) $\sigma_r(A + B) = \sigma_r(A) + \sigma_r(B)$

(ii) $\sigma_r(\lambda A) = \lambda \sigma_r(A)$, unde $\sup_{x \in E} A(x) = 1$.

Demonstrație. Din definiția sumei de submulțimi fuzzy avem

$$(A + B)(z) = \sup_{\substack{(x,\ y) \in E^2 \\ x+y=z}} [A(x) \wedge B(y)], \quad \forall z \in E.$$

Dacă $z \in \sigma(A + B)$, atunci $\sup_{\substack{(x,\ y) \in E^2 \\ x+y=z}} [A(x) \wedge B(y)] > r$ adică există x, y, $x + y = z$ cu $A(x), B(y) > r$, adică $x \in \sigma_r(A)$ și $y \in \sigma_r(B)$, deci $z \in \sigma_r(A) + \sigma_r(B)$. În consecință am demonstrat că $\sigma_r(A + B) \subseteq \sigma_r(A) + \sigma_r(B)$. Incluziunea inversă este evidentă și deci (i) este dovedită.

Din definiția înmulțirii cu scalar

$$(\lambda A)(z) = \begin{cases} A(u_\lambda), & \text{, pentru } u_\lambda = \lambda^{-1} z \text{ și } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{, pentru } \lambda = 0 \quad \text{și } z \neq 0 \\ \sup_{x \in E} A(x), & \text{, pentru } \lambda = 0 \quad \text{și } z = 0. \end{cases}$$

Fie $z \in \sigma_r(\lambda A)$. Atunci $\lambda A(z_1) > r$ adică $z = \lambda u_\lambda \in \lambda \sigma_r(A)$, cu $\lambda \neq 0$ sau $\lambda = 0$ și $z = 0$. Deci $\sigma_r(\lambda A) \subseteq \lambda \sigma_r(A)$. Analog rezultă $\lambda \sigma_r(A) \subseteq \sigma_r(\lambda A)$.

Astfel, am dovedit că nivelele stricte în raport cu adunarea și înmulțirea satisfac teorema de reprezentare.

Propoziția 5. Fie $A, B \in F(E)$ submulțimi fuzzy convexe. Atunci $A + B$ și λA sînt convexe.

PROGRAMAREA LINIARĂ CU RESTRICȚII FUZZY

Fie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) = < c, x >$, $c \in \mathbf{R}^n$ o funcțională liniară și mulțimea

$$P = \{x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbf{R}^n_+ / \ x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n \subseteq A\},$$

unde A_j sînt submulțimi fuzzy $A_j : \mathbf{R}^m \to [0,1]$, A este o submulțime fuzzy $A : \mathbf{R}^m \to [0,1]$ iar operațiile care apar în definiția lui P sînt cele de adunare și înmulțire cu scalar a submulțimilor fuzzy definite în secțiunea (2).

Problema este de a determina $x^\circ \in P$ astfel încît

$$< c, x^\circ > = \inf_{x \in P} < c, x >.$$

Conform propoziției 4, obținem următorul rezultat:

Propoziția 6. $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbf{R}^n_+ \cap P$ dacă și numai dacă $\forall r \in [0, 1)$

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 \sigma_r(A_1) + x_2 \sigma_r(A_2) + \ldots + x_n \sigma_r(A_r) \subseteq \sigma_r(A) \\ x_j \geqslant 0, \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Regiunea admisibilă P este specificată de o restricție fuzzy de tip incluziune care, pe baza propoziției anterioare, este reprezentată de fapt de un număr infinit de restricții incluziune așa cum au fost definite în [6].

Propoziția 7. Dacă submulțimea fuzzy $A : \mathbf{R}^m \to [0,1]$ are proprietatea

$$A(\mathbf{R}^m) = \{r_1, r_2, \ldots r_p\}$$

$$0 = r_1 < r_2 < \ldots < r_p \leqslant 1$$

atunci $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n_+ \cap P$ dacă și numai dacă

$$\text{(a')} \quad \begin{cases} x_1\sigma_{r_i}(A_1) + x_2\sigma_{r_i}(A_2) + \ldots + x_n\sigma_{r_i}(A_n) \subseteq \sigma_{r_i}(A) \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

Demonstrație. Evident dacă $x \in \mathbf{R}^n_+ \cap P$ atunci au loc în particular (a'). Invers să presupunem (a') și fie $r \in [0,1]$. Atunci pentru un $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ avem $r_i \leqslant r \leqslant r_{i+1}$. Pentru $r = r_i$ sau $r = r_{i+1}$ (a) este verificată. Dacă $r_i < r < r_{i+1}$ atunci $\sigma_r(A) = \sigma_{r_i}(A)$. Evident $\sigma_r(A) \subseteq \sigma_{r_i}(A)$. Dacă ar exista $x \in \sigma_{r_i}(A)$ astfel ca $x \notin \sigma_r(A)$ atunci $r_i < A(x) \leqslant r \leqslant r_{i+1}$ ceea ce contrazice ipoteza.

Astfel $x_1\sigma_r(A_1) + \ldots + x_n\sigma_r(A) \subseteq x_1\sigma_{r_i}(A) + \ldots +$

$$+ x_n\sigma_{r_i}(A) \subseteq \sigma_{r_i}(A) = \sigma_r(A).$$

Pe baza propoziției 2, problema de programare fuzzy este considerată ca o problemă de programare inexactă cu un număr finit de restricții. Această simplificare permite rezolvarea cu ajutorul unei probleme de programare liniară inexactă ca în Soyster [6] dacă:

$$A_i : \mathbf{R}^m \to [0,1], \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ sînt convexe} \tag{1}$$

$$A(\mathbf{R}^m) = \{r_1, r_2, \ldots, r_p\}, \quad 0 = r_1 < r_2 < \ldots < r_p \leqslant 1 \tag{2}$$

$$\sigma_{r_i}(A) = \{y \in \mathbf{R}^m \mid y \leqslant b^{r_i}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad b^{r_i} \in \mathbf{R}^m. \tag{3}$$

Corespunzător propozițiilor precedente, datele inexacte în coloanele $i = 1,2, \ldots, p$ ale programelor liniare pot fi modelate definind $A_i : \mathbf{R}^m \to [0,1]$. Eșantionînd intervalul $[0,1]$ și definind $A : \mathbf{R}^m \to [0,1]$ cu proprietățile (2), (3), problema (a') cu restricții incluziune poate fi rezolvată ușor. Pentru a ilustra această extindere fuzzy a programării liniare considerăm următorul exemplu care verifică (1), (2), (3).

Fie următoarea diviziune a intervalului $[0,1]$:

$$0 < \frac{1}{6} < \frac{1}{2} < \frac{4}{5} < 1$$

și următorul domeniu admisibil

$$xA_1 + yA_2 \subseteq A$$

$$A_1 : \mathbf{R}^2 \to [0,1] \quad \text{cu} \quad A_1(x,y) = f_1(x) \wedge g_1(y)$$

$$A_2 : \mathbf{R}^2 \to [0,1] \quad \text{cu} \quad A_2(x,y) = f_2(x) \wedge g_2(y)$$

$f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbf{R} \to [0,1]$

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{pentru } x \in [1, 2] \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 4 - x, & \text{pentru } x \in [3, 4] \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$$g_1(y) = \begin{cases} \dfrac{y-1}{2}, & \text{pentru } y \in [1, 3] \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$$g_2(y) = \begin{cases} y - 4, & \text{pentru } y \in [4, 5] \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$A : \mathbf{R}^2 \to [0, 1]$

$$A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } (x, y) \leqslant (4, 1) \\ 4/5, & \text{pentru } (x, y) \leqslant/\leqslant (4, 1) \text{ și } (x, y) \leqslant (6, 3) \\ 1/2, & \text{pentru } (x, y) \leqslant/\leqslant (6, 3) \text{ și } (x, y) \leqslant (8, 4) \\ 1/6, & \text{pentru } (x, y) \leqslant/\leqslant (8, 4) \text{ și } (x, y) \leqslant (10, 5) \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Evident (1), (2), și (3) sînt verificate. De exemplu pentru nivelul 1/2 restricțiile vor fi

$$x\sigma_{1/2}(A_1) + x\sigma_{1/2}(A_2) \subseteq \sigma_{1/2}(A), \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

unde

$$\sigma_{1/2}(A_1) = [1, 3/2) \times (1,3)$$

$$\sigma_{1/2}(A_2) = [3, 7/2) \times (9/2, 5]$$

$$\sigma_{1/2}(A) = \{W \in \mathbf{R}^2 / W \leqslant (6,3)\}.$$

CONFLUENȚĂ PONDERATĂ ÎN PROGRAMAREA FUZZY

Considerăm un mediu fuzzy ca un complex $(X, A_1, ..., A_n, L)$ unde X este mulțimea alternativelor, L este o latice și

$A_i : X \to L, \quad i = 1, 2, ..., n$ sînt criterii fuzzy.

Corespunzător principiului confluenței introdus de Bellman și Zadeh [2], dacă tratăm toate criteriile la fel putem redefini mediul fuzzy ca un obiect matematic (X, D, L) cu $D = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$. În acest mod decizia este definită ca o submulțime a alternativelor. Prin decizie optimă înțelegem un punct $x_0 \in X$ cu $D(x_0) = \sup_{x \in X} D(x)$.

Sînt situații în care obiectivele trebuie considerate cu importanța lor. În aceste cazuri la noțiunea de mediu fuzzy trebuie să adăugăm noțiunea de L — ponderare pentru a reformula problema deciziei.

Notînd cu N_n mulțimea indicilor criteriilor $\{1, 2, ..., n\}$, o L — ponderare este văzută ca o aplicație $g : P(N_n) \to L$. Această aplicație trebuie să fie o măsură fuzzy [7] care modelează o preferință adică gradul de importanță a diverselor coaliții formate cu elementele lui N_n.

Pentru fiecare $x \in X$ considerăm o aplicație

$$h_x : N_n \to L$$

dată prin $h_x(i) = A_i(x)$.

Fie $D : X \to L$ o funcție de decizie definită ca o integrală fuzzy [8]

$$D(x) = \int_{N_n} h_x(i) \circ g = \sup_{M \in P(N_n)} \inf_{i \in M} [h_x(i) \wedge g(M)]$$

Un element $\tilde{x} \in X$ care maximizează D este o decizie optimă.

Pentru a ilustra această idee, în mod concret, vom da o metodă de determinare a lui $\tilde{x}$ astfel încît

$$D(\tilde{x}) = \sup_{x \in X} D(x).$$

Notăm prin $P(n)$ mulțimea tuturor permutărilor lui N_n.

Propoziția 8. $\sup_{x \in X} D(x) = \max_{\pi \in P^*(n)} \{\max_{k=1,2,...,n} [\sup_{x \in X(\pi)} (A_{\pi(k)}(x) \wedge \alpha_{\pi(k)})]\}$

unde $P^*(n) = \{\pi \in P(n) / \exists\, x \in X$ cu $A_{\pi(i)}(x) \leqslant A_{\pi(i+1)}(x), \quad 1 \leqslant i < n-1\}$

$$X(\pi) = \{x \in X / A_{\pi(i)}(x) \leqslant A_{\pi(i+1)}(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$$

$$\alpha_{\pi(k)} = g(\{\pi(k), \pi(k+1), ..., \pi(n)\}), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Demonstrație. Vom utiliza următoarea lemă (Sugeno [7]).

Fie $K = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, $g : P(K) \to [0,1]$ o măsură fuzzy pe K și $h : K \to [0,1]$ o funcție. Dacă $h(s_i) \leqslant h(s_{i+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, atunci

$$\int_K h(s) \circ g = \max_i [h(S_i) \wedge g(K_i)]$$

unde $K_i = \{s_i, s_{i+1}, ..., s_n\}$, $\quad i = 1, 2, ..., n$.

Pe baza acestei leme avem

$$D(x) = \max_k [A_{\pi(k)} \wedge \alpha_{\pi(k)}]$$

unde $\pi \in P(n)$ pentru care $x \in X(\pi)$.

Fie $\pi \in P^*(n)$ și $x \in X(\pi)$. Atunci

$$\alpha_0 = \sup_{x \in X} D(x) \geqslant D(x)$$

adică

$$\sup_{x \in X} D(x) \geqslant \sup_{x \in X(\pi)} [\max_k (A_{\pi(k)}(x) \wedge \alpha_{\pi(k)})] = \max_k [\sup_{x \in X(\pi)} (A_{\pi(k)}(x) \wedge \alpha_{\pi(k)})].$$

Deoarece $\pi \in P^*(n)$ este arbitrar, rezultă că

$$\alpha_0 \geqslant \max_{\pi \in P^*(n)} \{\max_k [\sup_{x \in X(\pi)} (A_{\pi(k)}(x) \wedge \alpha_{\pi(k)})]\} = \alpha.$$

Invers fie $x \in X$. Atunci există $\pi \in P^*(n)$ astfel că $x \in X(\pi)$ și

$$\alpha_1 \geqslant \max_k [\sup_{x \in X(\pi)} (A_{\pi(k)}(x) \wedge \alpha_{\pi(k)})] = \sup_{x \in X(\pi)} [\max_k (A_{\pi(k)}(x) \wedge \alpha_{\pi(k)})] \geqslant$$

$$\geqslant \max_k (A_{\pi(k)}(x) \wedge \alpha_{\pi(k)}) = D(x).$$

Deoarece x este arbitrar, rezultă $\alpha_1 \geqslant \sup_{x \in X} D(x) = \alpha_0$ și astfel propoziția este dovedită.

Pentru fiecare $\pi \in P^*(n)$ și $k \in N_n$, notăm prin $(x(\pi(k)), \lambda(\pi(k)) \in X \times [0, 1]$ soluția optimă a următoarei probleme de programare matematică:

$$P(\pi, k) \begin{cases} \lambda = \max \\ \lambda \leqslant A_{\pi(k)}(x) \\ \lambda \leqslant \alpha_{\pi(k)} \\ x \in X(\pi). \end{cases}$$

Consecință. O alternativă $\tilde{x} \in X$ este o decizie optimă dacă și numai dacă $\tilde{x} = x(\pi_0(k_0))$ unde $\pi_0 \in P^*(n)$ și $k_0 \in N_n$ au proprietatea

$$\lambda(\pi_0(k_0)) = \max_{\pi \in P^*(n)} \max_k \lambda(\pi(k)).$$

Demonstrație. Afirmația rezultă din propoziția 8, și din faptul că

$$\lambda(\pi(k)) = A_{\pi(k)}(x^*) \wedge \alpha_{\pi(k)} = \sup_{x \in X(\pi)} [A_{\pi(k)}(x) \wedge \alpha_{\pi(k)}]$$

este echivalent cu faptul că $(x^*, \lambda(\pi(k)))$ este soluția optimă a problemei $P(\pi, k)$

PROGRAMARE LINIARĂ CU FUNCȚII OBIECTIV FUZZY

În paragraful 3 ne-am concentrat asupra cazului restricțiilor multiple. Acum ne vom ocupa de cazul la fel de important al obiectivelor multiple. Fie următoarea problemă de optimizare

$$\max f(x)$$

$$\Omega \begin{cases} Ax \leqslant b \\ x > 0 \end{cases}$$

unde $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x))$, $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$, $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, $b \in \mathbf{R}^m$, $x \in \mathbf{R}^n$ și $\max f(x)$ înseamnă că se cere determinarea unui punct de maxim Pareto a lui f pe Ω.

Presupunem că Ω este compact și fie $f^* = (f_1^*, f_2^*, ..., f_p^*)$ punctul ideal: $f_i^* = \sup_{x \in \Omega} f_i(x)$ [8]. În general punctul ideal nu poate fi atins prin elemente

$x \in \Omega$ şi de aceea este natural să considerăm următoarea problemă: dacă $a = (a_1, a_2, ..., a_p) \in \mathbf{R}^p$ este un vector de valori minime acceptabile, pentru fiecare criteriu cu $a_i < f_i^*$, $i = \overline{1, p}$, să se determine dacă este posibil un punct x^* de maxim Pareto al lui f pe Ω astfel ca $f_i(x^*) \in [a_i, f_i^*]$ şi $f_i(x^*)$ să fie cît mai aproape de f_i^*. Pentru fiecare i, definim următoarea submulţime fuzzy a lui Ω

$$g_i : \Omega \to [0,1]$$

$$g_i(x) = \begin{cases} \dfrac{f_i(x) - a_i}{f_i^* - a_i}, & \text{dacă } f_i(x) > a_i \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Pentru $x \in \Omega$, $g_i(x)$ reprezintă gradul de apartenenţă al valorii $f_i(x)$ la intervalul $[a_i, f_i^*]$.

Un punct $x^* \in \Omega$ este decizie optimă dacă

$$D(x^*) = \sup_{x \in \Omega} D(x)$$

unde $D : \Omega \to [0,1]$

$$D(x) = \min_i g_i(x).$$

Această problemă este echivalentă cu următoarea problemă de programare liniară [4], [9]:

$$(P) \begin{cases} x_{n+1} = max! \\ Ax \leqslant b \\ f_i(x) - (f_i^* - a_i) x_{n+1} \geqslant a_i. \end{cases}$$

Dacă $\Omega \neq \emptyset$, această problemă are o soluţie.

Teoremă. Presupunem $\exists x^\circ \in \Omega$ astfel ca $f_i(x^\circ) \geqslant a_i$ şi fie (x^*, x_{n+1}^*) o soluţie a problemei (P). Atunci

(a) $x^* \in \mathbf{R}^n$ este un punct de maxim Pareto al lui f pe Ω şi $f_i(x^*) \in [a_i, f_i^*]$.

(b) Fie $A_i = a_i + (f_i^* - a_i) x_{n+i}^*$. Atunci nu există $(B_1, B_2, ..., B_p) \in \mathbf{R}^p$ cu $B_i > A_i$, $i = 1, 2, ...,$ astfel ca sistemul

$$(S) \begin{cases} Ax \leqslant b \\ f_i(x) \geqslant B_i, \ i = 1, 2, ..., p \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

să fie compatibil.

Demonstraţie. (a) Este suficient să arătăm că x^* este un punct de maxim Pareto pentru $g = [g_1, g_2, ..., g_p]$. Avem

$$\min_i g_i(x^*) = \sup_{x \in \Omega} \min_i g_i(x).$$

Fie $x \in \Omega$ astfel ca $g(x) \leqslant g(x^*)$ sau $g(x) \geqslant g(x^*)$. Atunci

$$\min_i g_i(x) \leqslant \min_i g_i(x^*) \leqslant g_i(x^*), \ \forall_i.$$

Fie i_0 pentru care $g_{i_0}(x) = \min_i g_i(x)$. Atunci $g_{i_0}(x) \leqslant g_{i_0}(x^*)$ adică $g(x) \leqslant g(x^*)$ deci x^* este punct de maxim Pareto pentru g. Din ipoteză $(x^\circ, 0)$ este o soluție a lui (P) și astfel $x^*_{n+1} \geqslant 0$, adică $f_i(x^*) \in [a_i, f_i^*]$, $i = 1, 2, ..., p$.

(b) Presupunem că există $(B_1, B_2, ..., B_p) \in \mathbf{R}^p$ cu $B_i > A_i$, $i = 1, 2, ..., p$ astfel ca sistemul (S) să fie compatibil. Atunci $\exists\, x^\circ \in \Omega$ astfel ca $f_i(x^\circ) \geqslant B_i$ și deci (x°, x°_{n+1}) cu $x^\circ_{n+1} = \min_i \dfrac{f_i(x^\circ) - a_i}{f_i^* - a_i}$ verifică restricțiile problemei (P). Avem de asemenea

$$f_i(x^\circ) > A_i = a_i + (f_i^* - a_i)\, x^*_{n+1} \text{ adică}$$

$x^*_{n+1} < \dfrac{f_i(x^\circ) - a_i}{f_i^* - a_i}$, $\forall_i$; sau $x^*_{n+1} < x^\circ_{n+1}$ ceea ce contrazice faptul că (x^*, x^*_{n+1}) este o soluție optimă a lui (P).

BIBLIOGRAFIE

1. C. V. NEGOIȚĂ, D. A. RALESCU: *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis.* Birkhauser Verlag, Basel, 1975.
2. BELLMAN L.R., ZADEH L.A.: *Decision-Making in a Fuzzy Environment.* Management Science, 17(1970), B 141—B 164.
3. ZIMMERMANN H.I.: *Optimization in Fuzzy Environment.* Paper presented at the ORSA/TIMS Meeting, San Juan de Puerto Rico, October, 1974.
4. NEGOIȚĂ C.V., SULARIA M.: *Fuzzy Linear Programming and Tolerances in Planning.* Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, nr. 1, 1976.
5. FLONDOR P: *Strong levels of fuzzy sets.* Comunicare la Seminarul de sisteme fuzzy ținut la Academia de studii economice, Catedra de Cibernetică economică, 1975.
6. SOYSTER, A. L.: *Convex Programming with Set-Inclusive Constraints.* Applications to Inexat Linear Programming. Operations Research
7. SUGENO M.: *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications.* Ph. D. Thesis, Tokyo, Institute of Technology, 1974.
8. ZELENY M.: *Concept of Compromise Solutions and the Method of the Diplaced Ideal.* Comp. & Ops. Res., vol. 1, nr. 3—4, dec. 1974, p. 479—496.
9. SULARIA M.: *Tolerances in optimization.* Comunicare la Seminarul de Sisteme fuzzy ținut la Academia de Studii economice, Catedra de Cibernetică economică, 1975.

28.XII.1976

Von Anderson O.; Popp, W.; Schaffranek, M.; Steinmetz, D.; Stenger, H.

SCHÄTZEN UND TESTEN – EINE EINFÜHRUNG IN DIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND SCHLIESSENDE STATISTIK

(*Estimații și teste*)

Heidelberger Taschenbücher — Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1976, 385 pagini

Cartea „Estimații și teste" a autorilor: profesor dr. Oskar Anderson, profesor dr. Werner Popp, dr. Manfred Schaffranek, Dieter Steinmetz, profesor dr. Horst Stenger, prezintă o introducere în metodele statistice precum și în acele părți din calculul probabilităților pe care acestea se bazează.

Lucrarea cuprinde cinci părți și anume: calculul probabilităților, estimații, selecții și estimare, teste, analiza regresiei, precum și o anexă cu tabele statistice.

Partea privind teoria probabilităților se bazează pe statistica inductivă; prezentarea este astfel făcută încît să permită în continuare parcurgerea și a altor lucrări de statistică din partea celor ce doresc să aprofundeze studiile lor.

În părțile rezervate statisticii inductive, ideile de bază privind estimațiile și testul sînt date gradat pe exemplul unor probleme concrete. Se prezintă detaliat acele probleme practice care sînt în legătură cu eșantionul statistic.

În finalul fiecărei părți sînt propuse probleme spre rezolvare, acestea permițînd bineînțeles o aprofundare a materialului studiat.

Textul lucrării se bazează pe notele de curs ale autorilor ținute la universitățile din Göttingen, Mannheim și München, motiv pentru care parcurgerea cărții pretinde cunoștințe matematice de dificultate medie. Explicațiile necesare pentru înțelegerea acelor părți ce se referă la algebra mulțimilor și la analiza combinatorică, sînt date în anexe.

Cartea este bogat ilustrată cu figuri și se încheie cu o bibliografie care indică o serie de lucrări de specialitate din acest domeniu (în limba germană și engleză).

În ceea ce privește aplicarea metodelor statistice putem spune că acestea cunosc astăzi o răspîndire foarte mare la găsirea interdependenței între diverse variabile, în fizică, biologie, medicină, psihologie, lingvistică și în foarte mare măsură în științele economice.

Prezenta lucrare, constituie un îndreptar valoros atît pentru studenți, cît și pentru specialiștii din diverse domenii de activitate, care doresc să folosească instrumentarul statisticii matematice în analiza rezultatelor diferitelor variante considerate de ei, analiză, care să le permită tragerea unor concluzii mai riguroase privind problema studiată.

Dr. Camelia Rațiu Suciu

Prof. dr. G. THEILER
Universitatea Bucureşti
Prof. dr. L. TÖVISSI
Catedra de cibernetică
economică — A.S.E.

Repartiţii iniţiale corespunzătoare legilor limită ale valorilor extremale

Într-un articol precedent [1] am arătat cum se pune problema şi cum se află legile probabilistice limită pentru valorile extremale. A rămas deschisă problema găsirii repartiţiilor iniţiale F pentru care maximul M_n respectiv minimul m_n a unei selecţii de volum n tinde către una din cele trei legi limită găsite, atunci cînd $n \to \infty$. În particular ne vor interesa repartiţiile iniţiale care duc la repartiţii limită de tip Weibull spre a ne da mai bine seama în ce măsură repartiţia Weibull este de utilizat în problema de statistică care ne preocupă.

Vom începe cu un caz particular al lemei lui Feller [2], mai bine zis al lemei Hincin — Feller deoarece Hincin este cel ce a descoperit proprietatea asimptotică a repartiţiilor de acelaşi tip (a se vedea de exemplu [3] pagina 39), iar Feller i-a dat forma finală pe care am folosit-o în [1] şi o vom folosi şi acum, deoarece face inutile unele leme suplimentare (de exemplu, lemele 1 şi 2 de la paragraful 3 din [4], prima lemă fiind prezentată şi în [3] pagina 41).

În cadrul lucrării se vor pune la punct unele demonstraţii din literatura de specialitate relativ la anumite repartiţii F, se vor extinde unele rezultate şi se vor prezenta sumar altele relativ recente.

1. Presupunem că există două perechi de şiruri de numere reale $\{a_n\}$; $\{b_n\}$; $\{\alpha_n\}$; $\{\beta_n\}$; primul şi al treilea şir fiind constituite din numere pozitive, astfel încît în fiecare punct de continuitate a funcţiei de repartiţie U : $\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = U(x)$; $\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = U(x)$. Ne întrebăm ce legătură există între numerele a_n, b_n şi α_n, β_n.

Sîntem în cadrul lemei lui Hincin — Feller. În loc de $V(x) = U(Ax + B)$ avem $V(x) = U(x)$, deci $A = 1$, $B = 0$. Conform lemei amintite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n - b_n}{a_n} = 0$$

şi reciproc dacă aceste condiţii sînt îndeplinite şi unul din şirurile $\{F_n(a_n x + b_n)\}$, $\{F_n(\alpha_n x + \beta_n)\}$ tinde către $U(x)$ şi aceasta în fiecare punct de continuitate a lui U, atunci şi celălalt şir tinde către aceeaşi limită în punctul respectiv.

Să trecem acum la problema maximului. Aici $F_n(x) = F^n(x)$. Dacă presupunem că $F^n(a_n x + b_n) \to U(x)$ în fiecare punct de continuitate a lui $U(x)$ cu $0 < U(x) < 1$, atunci în mod necesar $F(a_n x + b_n) \to 1$ cînd $n \to \infty$ căci dacă ar exista un c cu $0 < c < 1$ astfel încît să existe o infinitate de numere n pentru care $F(a_n x + b_n) < c$, atunci limita lui $F^n(a_n x + b_n)$ ar fi 0 sau nu ar exista contrar ipotezei. Dar cum

$$F^n(a_n x + b_n) = \left([1 - (1 - F(a_n x + b_n)]^{\frac{1}{1-F(a_n x+b_n)}}\right)^{n[1-F(a_n x+b_n)]}$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = e^{-\lim_{n\to\infty} n[1-F(a_n x+b_n)]}$$

şi cum

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = U(x) = e^{\ln U(x)},$$

este clar că

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = U(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(a_n x + b_n)] = -\ln U(x);$$

$$0 < U(x) < 1.$$

Problema revine deci la a găsi acele funcţii de repartiţie F şi acele şiruri de numere reale pozitive, respectiv reale $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ astfel încît:

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n x + b_n)] = -\ln U(x)$$

în fiecare punct x a lui U pentru care $0 < U(x) < 1$, U fiind unul din cele trei tipuri de repartiţii posibile.

Condiţia de mai sus poate fi scrisă şi astfel:

$$n[1 - F(a_n x + b_n)] = -\ln U(x) + \varepsilon(x, n, a_n, b_n) \text{ adică } F(a_n x + b_n) =$$

$$= 1 + \frac{\ln U(x) - \varepsilon(x, n, a_n, b_n)}{n} \text{ cu } \varepsilon(x, n, a_n, b_n) \to 0, \text{ cînd } n \to \infty.$$

Ultima expresie de mai sus, faptul că pentru $0 < U(x) < 1$, U este funcţie continuă strict crescătoare şi anumite rezultate obţinute de Gnedenko

([3] teorema 6), ne-au orientat spre un procedeu relativ simplu pentru aflarea termenilor unor şiruri corespunzătoare $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ şi anume:

Fie x_1, x_2 două numere oarecare $x_1 < x_2$ astfel încît $0 < U(x_1), U(x_2) < 1$. Vom nota cu $x_i^{(n)}$ $(i = 1,2)$ cel mai mic x pentru care:

$$F(x) \leqslant 1 + \frac{\ln U(x_i)}{n} \leqslant F(x + 0).$$

(Reamintim că prin definiţie $F(x - 0) = F(x)$, iar dacă x este un punct de continuitate a lui F atunci şi $F(x + 0) = F(x)$, precum şi faptul că există funcţii continue constante pe anumite intervale).

Ne propunem a dovedi că drept numere a_n, b_n se pot lua soluţiile ecuaţiilor:

$$a_n x_1 + b_n = x_1^{(n)}; \quad a_n x_2 + b_n = x_2^{(n)}.$$

În acest scop pornim de la ipoteza că există două şiruri $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ astfel încît:

$$\lim_{n \to \infty} n[1 - F(\alpha_n x + \beta_n)] = -\ln U(x) \text{ adică}$$

$$F(\alpha_n x + \beta_n) = 1 + \frac{\ln U(x) - \varepsilon(x, n, \alpha_n, \beta_n)}{n} \text{ cu } \varepsilon(x, n, \alpha_n, \beta_n) \to 0,$$

cînd $n \to \infty$.

Fie h oarecare cu $0 < U(x_i - h), U(x_i + h) < 1$, pentru $i = 1, 2$, atunci:

$$F\left[\alpha_n\left(x_i - \frac{h}{2}\right) + \beta_n\right] = 1 + \frac{U\left(x_i - \frac{h}{2}\right) - \varepsilon\left(x_i - \frac{h}{2}, n, \alpha_n, \beta_n\right)}{n};$$

$$F\left[\alpha_n\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \beta_n\right] = 1 + \frac{U\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - \varepsilon\left(x_i + \frac{h}{2}, n, \alpha_n, \beta_n\right)}{n}.$$

Dorim ca în acelaşi timp : $F\left[\alpha_n\left(x_i - \frac{h}{2}\right) + \beta_n\right] < 1 + \frac{\ln U(x_i)}{n}$;

$$F\left[\alpha_n\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \beta_n\right] > 1 + \frac{\ln U(x_i)}{n}; \; i = 1,2.$$

Ori pentru aceasta este suficient ca

$$\left|\varepsilon\left(x_i - \frac{h}{2}, n, \alpha_n, \beta_n\right)\right| < \frac{1}{2}\left[\ln U(x_i) - \ln U\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right]$$

şi

$$\left|\varepsilon\left(x_i + \frac{h}{2}, n, \alpha_n, \beta_n\right)\right| < \frac{1}{2}\left[\ln U\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - \ln U(x_i)\right]; \quad i = 1,2.$$

Cum fiecare din cei patru ε tinde la 0 cînd $n \to \infty$, există un număr finit $N(h)$ astfel încît pentru $n > N(h)$ aceste inegalităţi să fie satisfăcute. Dar atunci:

$$\alpha_n(x_i - h) + \beta_n < x_i^{(n)} = a_n x_i + b_n < \alpha_n(x_i + h) + \beta_n; \quad i = 1,2,$$

căci $\alpha_n\left(x_i - \frac{h}{2}\right) + \beta_n$ nu poate fi mai mare decît $x_i^{(n)}$ deoarece în acest caz ar trebui ca

$$F\left[\alpha_n\left(x_i - \frac{h}{2}\right) + \beta_n\right] \geqslant F(x_i^{(n)} + 0) \geqslant 1 + \frac{\ln U(x_i)}{n},$$

ceea ce nu se poate întrucît

$$F\left[\alpha_n\left(x_i - \frac{h}{2}\right) + \beta_n\right] < 1 + \frac{\ln U(x_i)}{n}.$$

Prin urmare $\alpha_n\left(x_i - \frac{h}{2}\right) + \beta_n \leqslant x_i^{(n)}$ şi deci:

$$\alpha_n(x_i - h) + \beta_n < x_i^{(n)}.$$

Tot aşa $\alpha_n\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \beta_n$ nu poate fi mai mic decît $x_i^{(n)}$ căci atunci $F\left[\alpha_n\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \beta_n\right] \leqslant F\left(x_i^{(n)}\right) \leqslant 1 + \frac{\ln U(x_i)}{n}$ ceea ce nu se poate deoarece

$$F\left[\alpha_n\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \beta_n\right] > 1 + \frac{\ln U(x_i)}{n}.$$

Prin urmare $\alpha_n\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \beta_n \geqslant x_i^{(n)}$ (mai precis $>$) şi deci $\alpha_n(x_i + h) + \beta_n > x_i^{(n)}$. Dublele inegalităţi pe care le-am stabilit se mai pot scrie:

$$x_i - h < \frac{a_n}{\alpha_n} x_i + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} < x_i + h; \; i = 1, 2; \; n > N(h).$$

Cum h este oarecare rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{\alpha_n} x_1 + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n}\right] = x_1, \; \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{\alpha_n} x_2 + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n}\right] = x_2.$$

Dacă atît x_1 cît şi x_2 sînt diferiţi de 0, înmulţind prima relaţie cu x_2, a doua cu x_1 şi scăzînd, se vede imediat că $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} = 0$. Scăzînd apoi această relaţie din prima, se vede că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = 1$.

În fine, dacă unul din x_1, x_2 este egal cu 0, de exemplu $x_i = 0$, prima relație se reduce la $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} = 0$ și scăzînd-o din a doua se vede că și $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = 1$.

În concluzie, dacă $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to U(x)$ cînd $n \to \infty$ atunci $\frac{a_n}{\alpha_n} \to 1$; $\frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} \to 0$, ceea ce pe baza cazului particular al lemei lui Hincin — Feller menționat la început face ca $F^n(a_n x + b_n) \to U(x)$ și reciproc dacă $F^n(a_n x + b_n) \to U(x)$ atunci și $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to U(x)$. Demonstrația este completă.

Să trecem acum la un caz întîlnit des în aplicații și anume la acela în care F este funcție continuă. Aici $F(x) = F(x + 0)$ și $x_i^{(n)}$ adică $a_n x_i + b_n$ este cea mai mică rădăcină a ecuației $F(a_n x_i + b_n) = 1 + \frac{\ln U(x_i)}{n}$; $i = 1, 2$. Desigur dacă F este strict crescătoare ecuația admite o soluție unică.

Aplicăm rezultatele obținute la reprezentările canonice ale celor trei tipuri de funcții limită posibile pentru maximum adică $U(x) = e^{-e^{-x}}$; $e^{-x^{-\beta}}$; $e^{-(-x)^{\beta}}$.

a) $U(x) = e^{-e^{-x}}$; $-\infty < x < +\infty$; $\ln U(x) = -e^{-x}$ și cele două ecuații privitoare la x_1 și x_2 sînt:

$$F(a_n x_1 + b_n) = 1 - \frac{e^{-x_1}}{n}; \quad F(a_n x_2 + b_2) = 1 - \frac{e^{-x_2}}{n}.$$

Este firesc să se ia $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$. Ajungem astfel la următoarele condiții ale lui Gnedenko sub formularea din [5] (cu mici schimbări de notații):

Pentru ca repartiția limită a maximului (M_n) corespunzătoare repartiției inițiale F să existe și să fie $e^{-e^{-x}}$ este necesar și suficient ca pentru orice x; $-\infty < x < +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n x + b_n)] = e^{-x}$$

unde a_n și b_n sînt dați de ecuațiile: $F(b_n) = 1 - \frac{1}{n}$, $F(a_n + b_n) = 1 - \frac{1}{e \cdot n}$.

b) $U(x) = e^{-x^{-\beta}}$; $0 < x < +\infty$, $U(0) = 0$, $\ln U(x) = -x^{-\beta}$ și cele două ecuații privitoare la x_1 și x_2 sînt:

$$F(a_n x_1 + b_n) = 1 - \frac{x_1^{-\beta}}{n}; \quad F(a_n x_2 + b_n) = 1 - \frac{x_2^{-\beta}}{n}.$$

Aici s-ar putea lua $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. Ajungem astfel la următoarele condiții:

Pentru ca repartiția limită a maximului (M_n) corespunzătoare repartiției inițiale F să existe și să fie $e^{-x^{-\beta}}$ este necesar și suficient ca pentru orice x, $0 < x < +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n x + b_n)] = x^{-\beta}$$

unde a_n și b_n sînt dați de ecuațiile:

$$F(a_n + b_n) = 1 - \frac{1}{n};$$

$$F(2a_n + b_n) = 1 - \frac{1}{2^\beta \cdot n}.$$

c) $U(x) = e^{-(-x)^\beta}$; $-\infty < x < 0$; $U(0) = 1$; $\ln U(x) = -(-x)^\beta$

și cele două ecuații privitoare la x_1 și x_2 sînt:

$$F(a_n x_1 + b_n) = 1 - \frac{(-x_1)^\beta}{n}; \; F(a_n x_2 + b_n) = 1 - \frac{(-x_2)^\beta}{n}.$$

Aici s-ar putea lua $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$. Ajungem astfel la următoarele condiții:

Pentru ca repartiția limită a maximului (M_n) corespunzătoare repartiției inițiale F să existe și să fie $e^{-(-x)^\beta}$ este necesar și suficient ca pentru orice x; $-\infty < x < 0$:

$$\lim_{n \to \infty} n[1 - F(a_n x + b_n)] = (-x)^\beta$$

unde a_n și b_n sînt dați de ecuațiile:

$$F(-a_n + b_n) = 1 - \frac{1}{n};$$

$$F\left(-\frac{a_n}{2} + b_n\right) = 1 - \frac{1}{2^\beta \cdot n}.$$

Desigur în problemele cu caracter aplicativ care ne interesează, repartițiile limită se prezintă numai ca aproximații ale celor exacte și deci aflarea lui a_n și b_n este necesară pentru aprecierea gradului de aproximare obținut. De aceea procedeul indicat mai sus pentru calculul lui a_n și b_n (nu numai în cazul repartițiilor inițiale continue) prezintă interes.

Se pune însă și problema aflării directe (fără a se trece prin intermediul lui a_n și b_n) a condițiilor necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească o funcție de repartiție inițială F pentru ca repartiția limită a maximului M_n să existe și să fie deci de unul din cele trei tipuri canonice posibile:

$$e^{-x^{-\beta}}, \; e^{-(-x)^\beta}, \; e^{-e^{-x}}.$$

Această problemă a fost rezolvată pînă la capăt de Gnedenko [4] în ceea ce privește repartițiile limită $e^{-x^{-\beta}}$ și $e^{-(-x)^\beta}$, dar rezultatele obținute de acesta privitor la $e^{-e^{-x}}$ sînt numai parțiale. Chiar și soluțiile ulterioare formal complete, de exemplu, aceea a lui Marcus și Pinsky [5] nu pot fi socotite satisfăcătoare.

2. Ne vom ocupa acum de aceste probleme. Dar mai întîi o constatare. Cel ce urmărește memoriul lui Gnedenko [4] impresionat de eleganța și sobrietatea modului în care sînt tratate problemele este tentat să nu urmărească cu suficientă atenție toate detaliile demonstrațiilor, ceea ce poate a făcut să se treacă cu vederea unele lipsuri. Astfel, după cum vom arăta, așa este cazul

cu concluziile forțate trase din relațiile de la rîndul 5 al paginii 441. Tot așa eleganța și simplitatea unor demonstrații din Feller [2] face să se accepte unele afirmații ale acestuia, ce ar trebui dovedite, ca ultima parte a demonstrației propoziției de la pagina 270—271.

Iată de ce expunerea noastră spre a fi completă și de sine stătătoare va prezenta diferențe față de unele demonstrații socotite pînă acum ca satisfăcătoare.

Vom începe cu o observație privitoare la lema Hincin-Feller [2] pagina 246—247. Dacă se urmărește cu atenție demonstrația acesteia se vede imediat că ea este valabilă nu numai pentru șiruri de repartiții $\{F_n\}$ unde n parcurge mulțimea numerelor naturale ci și pentru șiruri $\{F_{n_k}\}$, unde n_k parcurge o submulțime infinită oarecare a mulțimii numerelor naturale, dacă în enunț și în demonstrație se înlocuiește n cu n_k ori de cîte ori apare n.

Fie $\lambda > 1$ oarecare. Drept șir $\{n_k\}$ vom considera șirul $\{[\lambda^k]\}$ unde $[\lambda^k]$ este partea întreagă a numărului λ^k. Desigur începînd de la un anumit k (depinzînd de λ) toate numerele $[\lambda^k]$ vor fi diferite.

Să presupunem acum că $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-x^{-\beta}}$ și deci că și $F^{[\lambda^n]}[\alpha_{[\lambda^n]}x + \beta_{[\lambda^n]}] \to e^{-x^{-\beta}}$.

(Orice subșir infinit al unui șir convergent este convergent și are aceeași limită).

Observăm acum că

$$F^{[\lambda^n]}[\alpha_{[\lambda^{n+1}]}\ x + \beta_{[\lambda^{n+1}]}] = [F^{[\lambda^{n+1}]}(\alpha_{[\lambda^{n+1}]}x + \beta_{[\lambda^{n+1}]}]^{[\lambda^n]/[\lambda^{n+1}]} \to$$

$$\to (e^{-x^{-\beta}})^{1/\lambda} = e^{-(\lambda^{1/\beta}x)^{\beta}}$$

căci $\dfrac{[\lambda^n]}{[\lambda^{n+1}]} = \dfrac{\lambda^n - \varepsilon_n}{\lambda^{n+1} - \varepsilon_{n+1}} \to \dfrac{1}{\lambda}$ cînd $n \to \infty$, deoarece $0 < \varepsilon_n,\ \varepsilon_{n+1} < 1$.

Aplicînd lema lui Hincin-Feller, completată după cum am arătat, rezultă că: $\dfrac{\alpha_{[\lambda^{n+1}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to \lambda^{1/\beta}$; $\dfrac{\beta_{[\lambda^{n+1}]} - \beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to 0$ atunci cînd $n \to \infty$. Cum $\lambda > 1$, desigur și $\lambda^{1/\beta} > 1$.

Din relațiile de mai sus rezultă în primul rînd că $\alpha_{[\lambda^n]} \to \infty$ cînd $n \to \infty$. Într-adevăr fie $\varepsilon > 0$, astfel încît $\lambda^{1/\beta} - \varepsilon > 1$. Din prima relație rezultă că există un număr natural n_0 astfel ca pentru $p \geqslant n_0$: $\lambda^{1/\beta} - \varepsilon < \dfrac{\alpha_{[\lambda^{p+1}]}}{\alpha_{[\alpha^p]}} <$

$< \lambda^{1/\beta} + \varepsilon$ și în particular: $\dfrac{\alpha_{[\lambda^{p+1}]}}{\alpha_{[\lambda^p]}} > \lambda^{1/\beta} - \varepsilon$ pentru $p = n_0, n_0 + 1, \ldots, n - 1$.

Înmulțind inegalitățile corespunzătoare rezultă că $\alpha_{[\lambda^n]} > \alpha_{[\lambda^{n_0}]} \cdot (\lambda^{1/\beta} - \varepsilon)^{n-n_0}$ și deci $\alpha_{[\lambda^n]} \to \infty$ cînd $n \to \infty$.

În al doilea rînd vom dovedi că $\dfrac{\beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to 0$, cînd $n \to \infty$. Întrucît $\dfrac{\beta_{[\lambda^{p+1}]} - \beta_{[\lambda^p]}}{\alpha_{[\lambda^p]}} \to 0$ cînd $p \to \infty$ rezultă că fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$, astfel ca pentru $p \geqslant n_0$: $-\dfrac{\lambda^{1/\beta} - 1}{4}\varepsilon <$

$$< \frac{\beta_{[\lambda^{p+1}]} - \beta_{[\lambda^p]}}{\alpha_{[\lambda^p]}} < \frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon \therefore -\frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon\alpha_{[\lambda^p]} < \beta_{[\lambda^{p+1}]} - \beta_{[\lambda^p]} < \frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon\alpha_{[\lambda^p]}.$$

Făcînd $p = n_0,\ n_0 + 1, \ldots, n-1$ şi adunînd se obţine:

$$-\frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon[\alpha_{[\lambda^{n_0}]} + \alpha_{[\lambda^{n_0+1}]} + \ldots + \alpha_{[\lambda^{n-1}]}] < \beta_{[\lambda^n]} - \beta_{[\lambda^{n_0}]} <$$

$$< \frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon[\alpha_{[\lambda^{n_0}]} + \alpha_{[\lambda^{n_0+1}]} + \ldots + \alpha_{[\lambda^{n-1}]}]$$

şi deci:

$$-\frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon\frac{\alpha_{[\lambda^{n_0}]} + \alpha_{[\lambda^{n_0+1}]} + \ldots + \alpha_{[\lambda^{n-1}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} + \frac{\beta_{[\lambda^{n_0}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} < \frac{\beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} <$$

$$< \frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon\frac{\alpha_{[\lambda^{n_0}]} + \alpha_{[\lambda^{n_0+1}]} + \ldots + \alpha_{[\lambda^{n-1}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} + \frac{\beta_{[\lambda^{n_0}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}}.$$

Cum n_0 este fix iar $\alpha_{[\lambda^n]} \to \infty$ cînd $n \to \infty$, există un număr natural $n_1 = n_1(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > n_1$: $-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\beta_{[\lambda^{n_0}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

În continuare reamintim o teoremă bine cunoscută a lui O. Stolz. Fie şirurile $\{U_n\}$; $\{V_n\}$. Dacă începînd de la un anumit n:

a) $V_{n+1} > V_n$; b) $\lim_{n\to\infty} V_n = +\infty$; c) există $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1} - U_n}{V_{n+1} - V_n}$ atunci există şi $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n}$ iar $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1} - U_n}{V_{n+1} - V_n}$.

Vom aplica acum această teoremă luînd $U_n = \alpha_{[\lambda^{n_0}]} + \alpha_{[\lambda^{n_0+1}]} + \ldots + \alpha_{[\lambda^{n-1}]}$; $V_n = \alpha_{[\lambda^n]}$. Desigur V_n luat satisface cerinţele a) şi b) ale teoremei, apoi cum $U_{n+1} - U_n = \alpha_{[\lambda^n]}$; $V_{n+1} - V_n = \alpha_{[\lambda^{n+1}]} - \alpha_{[\lambda^n]}$ se vede că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1} - U_n}{V_{n+1} - V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^{n+1}]} - \alpha_{[\lambda^n]}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{[\lambda^{n+1}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} - 1} = \frac{1}{\lambda^{1/\beta} - 1}.$$

Prin urmare şi condiţia c) este satisfăcută astfel că:

$$\frac{\alpha_{[\lambda^{n_0}]} + \alpha_{[\lambda^{n_0+1}]} + \ldots + \alpha_{[\lambda^{n-1}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to \frac{1}{\lambda^{1/\beta} - 1}.$$

Deci de la un anumit n să zicem n_2: $\frac{\alpha_{[\lambda^{n_0}]} + \alpha_{[\lambda^{n_0+1}]} + \ldots + \alpha_{[\lambda^{n-1}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} < \frac{2}{\lambda^{1/\beta} - 1}$. Din dubla inegalitate relativă la $\frac{\beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}}$ rezultă deci cu atît mai mult că pentru $n > max[n_0, n_1, n_2]$:

$$-\frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon\frac{2}{\lambda^{1/\beta}-1} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} < \frac{\lambda^{1/\beta}-1}{4}\varepsilon\frac{2}{\lambda^{1/\beta}-1} + \frac{\varepsilon}{2} \therefore -\varepsilon < \frac{\beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} < \varepsilon.$$

Prin urmare fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $N(\varepsilon)$ astfel că pentru $n > N(\varepsilon)$:

$$\left| \frac{\beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda_n]}} = 0.$$

Aşadar dacă $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-x^{-\beta}}$ atunci desigur şi

$$F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]} x + \beta_{[\lambda^n]}) \to e^{-x^{-\beta}}$$

iar conform celor de mai sus $\frac{\beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to 0$. Dacă luăm acum $a_{[\lambda^n]} = \alpha_{[\lambda^n]}$; $b_{[\lambda^n]} = 0$ se observă că $\frac{a_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to 1$; $\frac{\beta_{[\lambda^n]} - a_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to 0$ şi deci pe baza lemei completate a lui Hincin-Feller:

$$F^{[\lambda^n]}(a_{[\lambda^n]} x + b_{[\lambda^n]}) \to e^{-x^{-\beta}} \text{ adică } F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]} x) \to e^{-x^{-\beta}}.$$

Vom folosi acest ultim rezultat spre a arăta cum se obţine condiţia necesară şi suficientă a lui Gnedenko adică condiţia pe care trebuie să o satisfacă F pentru ca $M_n \to e^{-x^{-\beta}}$.

3. Am văzut că $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-x^{-\beta}} \to F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]} x) \to e^{-x^{-\beta}}$ şi că $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-x^{-\beta}} \Leftrightarrow n(1 - F(\alpha_n x + \beta_n)) \to x^{-\beta}$.

Absolut la fel cum s-a demonstrat anterior ultima relaţie se poate arăta că:

$$F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]} x + \beta_{[\lambda^n]}) \to e^{-x^{-\beta}} \Leftrightarrow [\lambda^n](1 - F(\alpha_{[\lambda^n]} x)) \to x^{-\beta}.$$

Reamintim în continuare că din $\frac{\alpha_{[\lambda^{n+1}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to \lambda^{1/\beta}$ a reieşit că de la un anumit n şirul $\{\alpha_{[\lambda^n]}\}$ este crescător iar $\alpha_{[\lambda^n]} \to \infty$ cînd $n \to \infty$. În consecinţă fiecărui x suficient de mare îi va corespunde un număr natural $s(x) = s$ astfel ca:

$$\alpha_{[\lambda^s]} \leqslant x < \alpha_{[\lambda^{s+1}]} \text{ şi deci } 1 - F(\alpha_{[\lambda^{s+1}]}) \leqslant 1 - F(x) \leqslant 1 - F(\alpha_{[\lambda^s]}).$$

Fie acum K un număr pozitiv oarecare. Evident $K\alpha_{[\lambda^s]} \leqslant Kx < K\alpha_{[\lambda^{s+1}]}$ şi deci:

$$1 - F(\alpha_{[\lambda^{s+1}]} K) \leqslant 1 - F(Kx) \leqslant 1 - F(\alpha_{[\lambda^s]} K).$$

Prin urmare:

$$\frac{1 - F(\alpha_{[\lambda^{s+1}]})}{1 - F(\alpha_{[\lambda^s]} K)} \leqslant \frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)} \leqslant \frac{1 - F(\alpha_{[\lambda^s]})}{1 - F(\alpha_{[\lambda^{s+1}]} K)} \therefore$$

$$\therefore \frac{\lambda[^s]}{[\lambda^{s+1}]} \cdot \frac{[\lambda^{s+1}] \cdot (1 - F(\alpha_{[\lambda^{s+1}]})}{[\lambda^s] \cdot (1 - F(\alpha_{[\lambda^s]} K)} - K^\beta \leqslant \frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)} - K^\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[\lambda^{s+1}]}{[\lambda^s]} \cdot \frac{[\lambda^s] \cdot (1 - F(\alpha_{[\lambda^s]}))}{[\lambda^{s+1}] \cdot (1 - F(\alpha_{[\lambda^{s+1}]} K))} - K^\beta.$$

Dacă $x \to \infty$ atunci și $s \to \infty$; $\frac{[\lambda^{s+1}]}{[\lambda^s]} \to \lambda$; $[\lambda^s](1 - F(\alpha_{[\lambda^s]})) \to 1$; $[\lambda^s](1 - F(\alpha_{[\lambda^s]}K)) \to K^{-\beta}$ etc. așa că membrul stîng al dublei inegalități de mai sus tinde către $K^\beta\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)$ iar cel drept către $K^\beta(\lambda - 1)$.

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Să luăm $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{2K^\beta}$. Cele două limite devin $-\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon/2K^\beta}$ și $\frac{\varepsilon}{2}$. Începînd de la o valoare suficient de mare a lui x să zicem x_0 membrul din stînga al dublei inegalități va fi mai mare decît $-\varepsilon$ $\left(\text{limita fiind } -\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon/2K^\beta}\right)$ iar membrul din dreapta mai mic decît ε $\left(\text{limita fiind } \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Așadar pentru $x > x_0(\varepsilon, K)$: $\left| \frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)} - K^\beta \right| < \varepsilon$ adică $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)} = K^\beta$. Aceasta este condiția lui Gnedenko. Am arătat că este necesară. Să dovedim că este și suficientă.

Să presupunem deci că $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)} = K^\beta$ ori care ar fi $K > 0$. Ne propunem acum să dovedim că există numere pozitive a_n astfel ca $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x)) = x^{-\beta}$.

Mai întîi o observație. Nu poate să existe un x_1 finit astfel ca $F(x_1) = 1$ căci în acest caz limita nu ar exista (dacă x_1 ar fi cel mai mic număr astfel ca $F(x_1) = 1$, luînd pentru x valori mai mari decît $max(x_1, Kx_1)$ expresia $\frac{(1 - F(x)}{1 - F(Kx)}$ nu ar avea sens și deci nu s-ar putea vorbi de $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)}$). Prin urmare pentru orice x finit $F(x) < 1$ și desigur $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, F fiind funcție de repartiție.

Vom lua acum drept a_n cel mai mic x care satisface dubla inegalitate: $F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F(x + 0)$ și deci

$$F(a_n) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F(a_n + 0) \leqslant F(a_n(1 + \varepsilon'))$$

cu $\varepsilon' > 0$ oarecare. (Evident $a_n \to \infty$, cînd $n \to \infty$).

În consecință:

$$n(1 - F(a_n(1 + \varepsilon'))) \leqslant 1 \leqslant n(1 - F(a_n))$$

și deci $\frac{n(1 - F(a_n x))}{n(1 - F(a_n))} \leqslant \frac{n(1 - F(a_n x))}{1} \leqslant \frac{n(1 - F(a_n x))}{n(1 - F(a_n(1 + \varepsilon')))}$,

de unde:

$$\frac{1 - F(a_n x)}{1 - F(a_n)} - x^{-\beta} \leqslant n(1 - F(a_n x)) - x^{-\beta} \leqslant \frac{1 - F(a_n x)}{1 - F(a_n(1 + \varepsilon'))} - x^{-\beta}.$$

Dacă am face $n \to \infty$ membrul din stînga ar tinde către 0 căci în acest caz s-ar aplica fracției de acolo condiția din enunț cu $a_n x$ în loc de x și a_n în loc de Kx (aici x este fix) și deci

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-F(a_n x)}{1-F(a_n)} - x^{-\beta}\right] = \lim_{a_n x\to\infty} \frac{1-F(a_n x)}{1-F(a_n)} - x^{-\beta} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta} - x^{-\beta} = 0.$$

Tot așa cînd $n \to \infty$ membrul drept tinde către $\dfrac{(1+\varepsilon')^{\beta}-1}{x^{\beta}}$ căci aici în loc de x avem $a_n x$ iar în loc de Kx; $a_n(1+\varepsilon')$ astfel că:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-F(a_n x)}{1-F(a_n(1+\varepsilon'))} - x^{-\beta}\right] = \lim_{a_n x\to\infty} \frac{1-F(a_n x)}{1-F(a_n(1+\varepsilon'))} - x^{-\beta} =$$

$$= \left(\frac{1+\varepsilon'}{x}\right)^{\beta} - x^{-\beta} = \frac{(1+\varepsilon')^{\beta}-1}{x^{\beta}}.$$

Dacă se ia $(1+\varepsilon')^{\beta} - 1 = \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot x^{\beta}$ adică $\varepsilon' = \left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2}\, x^{\beta}\right)^{1/\beta}$ limita este $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Limitele de la stînga, respectiv dreapta, fiind 0, respectiv $\dfrac{\varepsilon}{2}$, rezultă că există un $n_0(\varepsilon, x) = n_0$ astfel ca pentru $n > n_0$:

$$-\varepsilon < n(1-F(a_n x)) - x^{-\beta} < \varepsilon \;\therefore\; |n(1-F(a_n x)) - x^{-\beta}| < \varepsilon \text{ adică}$$

$$\lim_{n\to\infty} n(1-F(a_n x)) = x^{-\beta}.$$

Reciproca este complet dovedită și în plus din toate cele de mai sus rezultă că atunci cînd $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-x^{-\beta}}$ există numere pozitive a_n astfel ca și $F^n(a_n x) \to e^{-x^{-\beta}}$ și deci pe baza lemei lui Hincin-Gnedenko: $\dfrac{a_n}{\alpha_n} \to 1$; $\dfrac{\beta_n - 0}{\alpha_n} = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \to 0$.

Proprietatea $\dfrac{\beta_{[\lambda n]}}{\alpha_{[\lambda n]}} \to 0$ stabilită anterior se extinde deci pentru orice $n\left(\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \to 0\right)$.

Observații: În memoriul din Annals of Mathematics din 1943 la pagina 441 Gnedenko deduce din $\dfrac{a_{[n\beta]}}{a_n} \to \beta^{1/\alpha}$; $\dfrac{b_{[n\beta]} - b_n}{a_{[n\beta]}} \to 0$ că este suficient a se lua $a_{[n\beta]} = a_n \beta^{1/\alpha}$, $b_{[n\beta]} = b_n$ și notînd $n_s = [n_{s-1}\beta]$; $n_1 = [n\beta]$, unde n este considerat ca fix, deduce că $a_{n_s} = a_n \beta^{s/\alpha}$, $b_{n_s} = b_n$ pentru orice număr natural s și apoi făcînd $s \to \infty$ ajunge la concluzia că $\dfrac{b_{n_s}}{a_{n_s}} \to 0$. Raționamentul este desigur eronat. Prin procedeul lui Gnedenko se obține o soluție particulară și atît, iar teorema este demonstrată numai pentru acest caz particular

(pentru anumite funcții de repartiție F, nu pentru toate cele care sînt posibile). Totuși teorema este valabilă, după cum am dovedit și în cazul general. De altfel, se pot construi ușor și soluții care nu se reduc la acelea a lui Gnedenko. De exemplu, se poate lua $\alpha_{n_s} = a_n \cdot \beta^{s/\alpha} (\ln n)^k$. Aici $\frac{\alpha_{n_s}}{\alpha_{n_{s-1}}} \to \lambda^{1/\alpha}$ și totuși $\frac{\alpha_{n_s}}{a_{n_s}} \to \infty$ și nu către 1 cum ar trebui să fie dacă soluția lui Gnedenko ar reprezenta cazul general.

În ceea ce-l privește pe Feller acesta nu se ocupă de cazul general: $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-x^{-\beta}}$, ci direct de $F^n(a_n x) \to e^{-x^{-\beta}}$, fără a arăta cum și de ce cazul general se reduce la ultimul. Mai mult, Feller trece cu ușurință asupra teoremei reciproce afirmînd că există numere pozitive a_n astfel ca $n(1 - F(a_n)) \to 1$, dar nu justifică această afirmație.

Dacă F este funcție continuă este ușor de arătat că există numere a_n astfel ca $n(1 - F(a_n)) = 1$, dar dacă F nu este funcție continuă situația se complică. Noi am arătat urmînd în esență procedeul lui Gnedenko, cum se demonstrează reciproca.

4. Trecem acum la a doua lege limită adică la cazul în care $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-(-x)^\beta}$; $-\infty < x \leqslant 0$.

Procedînd ca la § 2 și păstrînd notațiile de acolo deducem:

$$F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]} x + \beta_{[\lambda^n]}) \to e^{-(-x)^\beta}; \quad F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^{n+1}]} x + \beta_{[\lambda^{n+1}]}) = (F^{[\lambda^{n+1}]}(\alpha_{[\lambda^{n+1}]} x +$$

$$+ \beta_{[\lambda^{n+1}]})^{[\lambda^n]/[\lambda^{n+1}]} \to e^{-\frac{1}{\lambda}(-x)^\beta} = e^{-(-1/\lambda^{1/\beta} \cdot x)^\beta}.$$

Aplicînd și aici teorema lui Hincin-Feller completată $\left(A = \frac{1}{\lambda^{1/\beta}}, B = 0\right)$ rezultă:

$$\frac{\alpha_{[\lambda^{n+1}]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to \frac{1}{\lambda^{1/\beta}}; \quad \frac{\beta_{[\lambda^{n+1}]} - \beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to 0; \text{ cînd } n \to \infty.$$

Notînd $\alpha_{[\lambda^n]} = U_n$; $\beta_{[\lambda^n]} = V_n$, observăm în primul rînd că pe baza teoremei lui d'Alembert de la serii, seria cu termenul general U_n este convergentă căci $\frac{U_{n+1}}{U_n} \to \frac{1}{\lambda^{1/\beta}} < 1$ și deci U_n adică $\alpha_{[\lambda^n]} \to 0$ cînd $n \to \infty$. Mai mult, fie $\varepsilon_1 > 0$ astfel ca $\mu = \frac{1}{\lambda^{1/\beta}} + \varepsilon_1 < 1$; există atunci un $n_0 = n_0(\varepsilon_1, \lambda)$ astfel ca pentru $p \geqslant n_0$, $\frac{U_{p+1}}{U_p} < \mu$, deci de la un anumit p, termenii U_p sînt

descrescători și deoarece $\frac{U_{n_0+1}}{U_{n_0}} < \mu$; $\frac{U_{n_0+2}}{U_{n_0+1}} < \mu$; ... ; $\frac{U_n}{U_{n-1}} < \mu$, înmulțind rezultă:

$$U_n < \mu^{n-n_0} U_{n_0} \text{ adică } \alpha_{[\lambda^n]} < \left(\frac{1}{\beta^{1/\beta}} + \varepsilon_1\right)^{n-n_0} \alpha_{[\lambda^{n_0}]}. \text{ Dacă } n' \geqslant n_0 \text{ atunci:}$$

$$U_{n'} + U_{n'+1} + \ldots \leqslant U_{n_0} + U_{n_0+1} + \ldots < (1 + \mu + \mu^2 + \ldots)\, U_{n_0} =$$

$$= \frac{1}{1-\mu} U_{n_0} = \eta$$

(η număr pozitiv).

În al doilea rînd cum $\frac{V_{n+1} - V_n}{U_n} \to 0$, cînd $n \to \infty$, fie $\varepsilon > 0$ oarecare; există un $n_1(\varepsilon, \lambda) \geqslant n_0$ astfel că pentru $s \geqslant n_1$ avem:

$$-\frac{\varepsilon}{2\eta} < \frac{V_{s+1} - V_s}{U_s} < \frac{\varepsilon}{2\eta} \therefore -\frac{\varepsilon}{2\eta} U_s < V_{s+1} - V_s < \frac{\varepsilon}{2\eta} U_s.$$

Făcînd $s = n_1, n_1 + 1, \ldots n - 1$ și adunînd se vede că:

$$-\frac{\varepsilon}{2\eta}(U_{n_1} + U_{n_1+1}, + \ldots + U_{n-1}) < V_n - V_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2\eta}(U_{n_1} + U_{n_1+1} + \ldots).$$

Cum $U_{n_1} + U_{n_1+1} + \ldots + U_{n-1} < U_{n_0} + U_{n_0+1} + \ldots < \eta$ urmează că:

$$-\frac{\varepsilon}{2\eta} \cdot \eta < V_n - V_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2\eta} \cdot \eta \therefore -\frac{\varepsilon}{2} < V_n - V_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Putem trage acum mai multe concluzii. În primul rînd întrucît $V_{n_1} - \frac{\varepsilon}{2} < V_n < V_{n_1} + \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n > n_1$, șirul $\{V_n\}$ este mărginit. În al doilea rînd fie m, n două numere oarecare mai mari decît n_1. Din $-\frac{\varepsilon}{2} < V_n - V_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$; $-\frac{\varepsilon}{2} < V_m - V_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ rezultă: $-\varepsilon < V_m - V_n < \varepsilon$.

Dar atunci pe baza teoremei fundamentale a lui Cauchy urmează că șirul $\{V_n\}$ este convergent, căci $\varepsilon < 0$ este arbitrar iar m, n sînt supuse singurei cerințe m, $n > n_1(\varepsilon)$, λ fiind fix.

Prin urmare $\beta_{[\lambda^n]} \to x_0$ cînd $n \to \infty$; x_0 număr finit reprezentînd limita acestui șir.

În al treilea rînd să revenim la inegalitatea $-\frac{\varepsilon}{2\eta} < \frac{V_{s+1} - V_s}{U_s} < \frac{\varepsilon}{2\eta}$ adică $-\frac{\varepsilon}{2\eta} U_s < V_{s+1} - V_s < \frac{\varepsilon}{2\eta} U_s$, valabilă pentru orice $s > n_1$ și să facem $s = n, n+1, \ldots, n+p-1$. Adunînd și împărțind cu U_n se obține:

$$-\frac{\varepsilon}{2\eta} \cdot \frac{U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{n+p-1}}{U_n} < \frac{V_{n+p} - V_n}{U_n} < \frac{\varepsilon}{2\eta} \cdot \frac{U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{n+p-1}}{U_n}.$$

Cum:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < \mu;\ \frac{U_{n+2}}{U_n} < \mu^2;\ \ldots,\ \frac{U_{n+p-1}}{U_n} < \mu^{p-1}$$

de aici rezultă

$$-\frac{\varepsilon}{2\eta}(1+\mu+\mu^2+\ldots) < \frac{V_{n+p}-V_n}{V_n} < \frac{\varepsilon}{2\eta}(1+\mu+\mu^2+\ldots)$$

adică

$$-\frac{\varepsilon}{2\eta}\cdot\frac{1}{1-\mu} < \frac{V_{n+p}-V_n}{V_n} < \frac{\varepsilon}{2\eta}\cdot\frac{1}{1-\mu},$$

sau notînd

$$\frac{\varepsilon}{2\eta(1-\mu)} = \frac{\varepsilon}{2n_0} = \varepsilon';\ -\varepsilon' < \frac{V_{n+p}-V_n}{U_n} < \varepsilon'.$$

Făcînd $p \to \infty$, urmează că $-\varepsilon' \leqslant \frac{x_0 - V_n}{U_n} \leqslant \varepsilon'$; $(n > n_1(\varepsilon))$ şi cum ε şi deci şi ε' este arbitrar, rezultă că $\frac{x_0 - V_n}{U_n} \to 0$ adică $\frac{x_0 - \beta_{[\lambda^n]}}{\alpha_{[\lambda^n]}} \to 0$ cînd $n \to \infty$ aşa că pe baza teoremei lui Hincin-Feller:

$$F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]}x + \beta_{[\lambda^n]}) \to e^{-(-x)^\beta} \Leftrightarrow F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]}x + x_0) \to e^{-(-x)^\beta};$$

de la un anumit n şirul $\{\alpha_{[\lambda^n]}\}$ fiind descrescător iar $\alpha_{[\lambda^n]} \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Putem dovedi acum rezultatul lui Gnedenko, în cazul general, folosind în esenţă procedeul său.

Teorema lui Gnedenko se poate enunţa astfel;

Pentru ca o funcţie de repartiţie F să fie astfel încît $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-(-x)^\beta}$; $-\infty < x < 0$, este necesar şi suficient:

1. Să existe un x_0 astfel ca $F(x_0) = 1$ şi $F(x_0 - \varepsilon) < 1$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

2. $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1 - F(Kx + x_0)}{1 - F(x + x_0)} = K^\beta$, pentru orice $K > 0$, unde $x \to -0$ înseamnă că $x \to 0$ prin valori mai mici decît 0.

Existenţa numărului finit x_0 am dovedit-o mai sus, iar faptul că $F(x_0 - \varepsilon) < 1$ este o consecinţă a celor stabilite anterior:

$$\alpha_{[\lambda^n]} \to 0;\ \beta_{[\lambda^n]} \to x_0 \text{ cînd } n \to \infty.$$

Într-adevăr pentru orice $x < 0$ fixat, $\lim\limits_{n \to \infty}(\alpha_{[\lambda^n]}x + \beta_{[\lambda^n]}) = x_0$ şi deci de la un anumit n: $\alpha_{[\lambda^n]}x + \beta_{[\lambda^n]} > x_0 - \varepsilon$ aşa că $F(\alpha_{[\lambda^n]}x + \beta_{[\lambda^n]}) \geqslant (F(x_0 - \varepsilon)$. Dacă $F(x_0 - \varepsilon) = 1$ atunci începînd de la un anumit n şi $F(\alpha_{[\lambda^n]}x + \beta_{[\lambda^n]}) = 1$ şi deci $F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]}x + \beta_{[\lambda^n]})$ ar tinde către 1 şi nu către $e^{-(-x)^\beta} < 1$. Prin urmare $F(x_0 - \varepsilon) < 1$.

Pentru a dovedi necesitatea condiției 2 pornim de la faptul că:

$$F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]}x + \beta_{[\lambda^n]}) \to e^{-(-x)^\beta} \Leftrightarrow F^{[\lambda^n]}(\alpha_{[\lambda^n]}x + x_0) \to e^{-(-x)^\beta} \Leftrightarrow [\lambda^n](1 -$$

$$- F(\alpha_{[\lambda^n]}x + x_0)) \to (-x)^\beta$$

precum și de la aceea că începînd de la un anumit n șirul $\{\alpha_{[\lambda^n]}\}$ este strict descrescător iar $\alpha_{[\lambda^n]} \to 0$, cînd $n \to \infty$.

Fie x un număr negativ suficient de apropiat de 0. Conform celor de mai sus va exista un număr finit s astfel ca:

$$(-1)\,\alpha_{[\lambda^s]} \leqslant x < (-1)\,\alpha_{[\lambda^{s+1}]}$$

și deci

$$(-1)\,\alpha_{[\lambda^s]} + x_0 \leqslant x + x_0 < (-1)\,\alpha_{[\lambda^{s+1}]} + x_0$$

și tot așa

$$(-K)\,\alpha_{[\lambda^s]} + x_0 \leqslant Kx + x_0 < (-K)\,\alpha_{[\lambda^{s+1}]} + x_0.$$

Desigur $s \to \infty$ cînd $x \to -0$. În consecință:

$$1 - F((-1)\,\alpha_{[\lambda^{s+1}]} + x_0) \leqslant 1 - F(x + x_0) \leqslant 1 - F((-1)\,\alpha_{[\lambda^s]} + x_0)$$

$$1 - F((-K)\,\alpha_{[\lambda^{s+1}]} + x_0) \leqslant 1 - F(Kx + x_0) \leqslant 1 - F((-K)\,\alpha_{[\lambda^s]} + x_0)$$

și deci:

$$\frac{[\lambda^s]}{[\lambda^{s+1}]} \cdot \frac{[\lambda^{s+1}]\,(1 - F((-K)\,\alpha_{[\lambda^{s+1}]} + x_0))}{[\lambda^s]\,(1 - F((-1)\,\alpha_{[\lambda^s]} + x_0))} - K^\beta \leqslant \frac{1 - F(Kx + x_0)}{1 - F(x + x_0)} - K^\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[\lambda^{s+1}]}{[\lambda^s]} \cdot \frac{[\lambda^s]\,(1 - F((-K)\,\alpha_{[\lambda^s]} + x_0))}{[\lambda^{s+1}]\,(1 - F((-1)\alpha_{[\lambda^{s+1}]} + x_0))} - K^\beta$$

cînd $x \to -0$, $s \to \infty$; $\dfrac{[\lambda^{s+1}]}{[\lambda^s]} \to \lambda$;

$[\lambda^s]\,(1 - F((-1)\,\alpha_{[\lambda^s]} + x_0)) \to 1$; $[\lambda^s]\,(1 - F((-K)\,\alpha_{[\lambda^s]} + x_0)) \to K^\beta$ etc.

astfel că membrul din stînga al dublei inegalități tinde către $\left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right) K^\beta$ iar membrul din dreapta către $(\lambda - 1)\,K^\beta$.

Am găsit exact aceleași limite ca la dubla inegalitate de la §3. Restul demonstrației este absolut la fel ca acolo cu singura diferență că în loc de $x \to +\infty$, aici $x \to -0$.

Prin urmare: $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1 - F(Kx + x_0)}{1 - F(x + x_0)} = K^\beta$, pentru orice $K > 0$. Condiția 2 este complet justificată în cazul general.

Să dovedim acum reciproca deci că atunci cînd condițiile 1 și 2 ale teoremei sînt satisfăcute există numere pozitive a_n astfel ca

$$n(1 - F(a_n x + x_0)) \to (-x)^\beta, \text{ cînd } n \to \infty.$$

În acest scop notăm cu $(-1)\ a_n$ cel mai mic $x (x < 0)$ astfel ca:

$$F(x + x_0) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F(x + x_0 + 0).$$

Un astfel de x există căci $F(x_0) = 1$ și pentru orice $\varepsilon > 0$, $F(x_0 - \varepsilon) < 1$. Desigur $(-1)\, a_n \to 0$ cînd $n \to \infty$. Așadar:

$$F((-1)\ a_n + x_0) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F((-1)\ a_n + x_0 + 0) \leqslant F(-(1 - \varepsilon')\ a_n + x_0)),$$

$\varepsilon' > 0$ oarecare și deci:

$$n(1 - F(-(1 - \varepsilon')\ a_n + x_0)) \leqslant 1 \leqslant n(1 - F((-1)\ a_n + x_0)).$$

În consecință:

$$\frac{n(1 - F(a_n x + x_0))}{n(1 - F((-1)\ a_n + x_0))} \leqslant \frac{n(1 - F(a_n x + x_0))}{1} \leqslant \frac{n(1 - F(a_n x + x_0))}{n(1 - F(-(1 - \varepsilon')\ a_n + x_0))};$$

(aici x este fix), adică:

$$\frac{1 - F(a_n x + x_0)}{1 - F(a_n(-1) + x_0)} - (-x)^\beta \leqslant n(1 - F(a_n x + x_0)) - (-x)^\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1 - F(a_n x + x_0)}{1 - F(a_n(-(1 - \varepsilon'))x + x_0))} - (-x)^\beta.$$

Aplicînd condiția a doua a teoremei, unde în membrul stîng în loc de K apare $(-x)$ în loc de x; $(-a_n)$ și ținînd seama de faptul că atunci cînd $n \to \infty$; $(-a_n) \to 0$, se vede că membrul stîng tinde către $(-x)^\beta - (-x)^\beta = 0$. Tot așa în membrul drept în loc de x apare $-(1 - \varepsilon')a_n$ și în loc de Kx; $a_n x$ astfel că în loc de K apare $-\frac{x}{1 - \varepsilon'}$, și deci limita este $\left(-\frac{x}{1 - \varepsilon'}\right)^\beta - (-x)^\beta =$ $= \left(\frac{1}{(1 - \varepsilon')^\beta} - 1\right) \cdot (-x)^\beta$. Dacă se ia $\left(\frac{1}{(1 - \varepsilon')^\beta} - 1\right) = \frac{\varepsilon}{2(-x)^\beta}$ adică $\varepsilon' = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2(-x)^\beta}\right)^{1/\beta}}$ limita este $\frac{\varepsilon}{2}$.

De aici rezultă că începînd de la un anumit n suficient de mare depinzînd de ε și de x:

$$-\varepsilon < n(1 - F(a_n x + x_0)) - (-x)^\beta < \varepsilon.$$

Cum ε a fost luat arbitrar aceasta înseamnă că $\lim_{n \to \infty} n(1 - F(a_n x + x_0)) =$ $= (-x)^\beta$ și reciproca teoremei este complet demonstrată.

5. Trecem acum la al treilea caz limită adică la cel în care:

$$F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}} \Leftrightarrow n(1 - F(\alpha_n x + \beta_n)) \to e^{-x}.$$

Pentru ca ultima egalitate asimptotică să poată avea loc este evident necesar ca $F(\alpha_n x + \beta_n) \to 1$ cînd $\to \infty$. Să ținem seama acum de faptul că F se poate găsi într-una din următoarele două situații: a) există un x_0 finit astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$, $F(x_0 - \varepsilon) < 1$ și totodată $F(x_0 + 0) = 1$; b) un astfel de x_0 nu există deci pentru orice y finit $F(y) < 1$.

În prima situație fiecărui x îi corespunde un număr natural $n_0(x)$ astfel ca pentru $n > n_0(x)$: $\alpha_n x + \beta_n \leqslant x_0$ și în plus $(\alpha_n x + \beta_n) \to x_0$ cînd $n \to \infty$. În particular făcînd $x = 0$ și $x = 1$ rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = x_0; \lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = x_0 \text{ și deci:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} ((\alpha_n + \beta_n) - \beta_n)) = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) - \lim_{n\to\infty} \beta_n = x_0 - x_0 = 0.$$

Așadar în acest caz începînd de la un anumit n: $\beta_n \leqslant x_0$, $\beta_n \to x_0$ și $\alpha_n \to 0$ cînd $n \to \infty$. De aici mai rezultă că atunci cînd $x_0 \neq 0$, $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Dacă $x_0 = 0$, pentru $n > n_0(x)$: $\alpha_n x + \beta_n \leqslant 0$ și deci pentru $n > n_0(0)$: $\beta_n \leqslant 0$. Dar mai mult, vom arăta că începînd de la un anumit n : $\beta_n < 0$. În acest scop pornim de la egalitatea asimptotică $n(1 - F(\alpha_n x + \beta_n)) \to e^{-x}$ și făcînd $x = 0$ se vede că $n(1 - F(\beta_n)) \to 1$. De aici rezultă că de la un anumit n: $\beta_n \neq 0$. Să presupunem că nu este așa. Atunci ar exista o infinitate de numere naturale n_k pentru care $\beta_{n_k} = 0$ iar pentru acestea $n_k(1 - F(\beta_{n_k})) = n_k(1 - F(0))$ așa că $\lim_{n_k\to\infty} n_k(1 - F(\beta_{n_k})) = \infty$, respectiv 0 după cum $F(0) < 1$, respectiv egal cu 1. Or, orice subșir infinit al unui șir convergent este convergent și are aceeași limită ca și șirul inițial; ar trebui deci ca $n_k(1 - F(\beta_{n_k})) \to 1$. S-a ajuns la o contradicție, ipoteza că nu există un număr finit n' și astfel ca pentru $n > n'$; $\beta_n \neq 0$ cade.

În concluzie pentru $n > max(n_0(0), n')$; $\beta_n < 0$. Să notăm $max\,(n_0(0), n')$ cu n''. Dacă $n > max\,(n_0(x), n'')$ atunci $\alpha_n x + \beta_n \leqslant 0$ și $\beta_n < 0$. În particular dacă $x > 0$ și $n > max\,(n_0(x), n'')$: $\alpha_n x - (-\beta_n) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{(-\beta_n)} \leqslant \frac{1}{x}$ și cum x este arbitrar de aici urmează că $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$, cînd $n \to \infty$. Așadar în prima situație $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to x_0$ și $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$ oricare este x_0 finit. În a doua situație $(\alpha_n x + \beta_n) \to \infty$ cînd $n \to \infty$ pentru orice x finit și în particular $\beta_n \to \infty$. Privitor la comportarea lui α_n aici nu putem spune prea mult dar privitor la raportul $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$, da. Fie $x = -y$ cu $y > 0$. Întrucît $(-\alpha_n y + \beta_n) \to \infty$ cînd $n \to \infty$, de la un anumit n depinzînd de y; $-\alpha_n y + \beta_n > 0$; $\beta_n > 0$ și deci $\frac{\alpha_n}{\beta_n} < \frac{1}{y}$.

Prin urmare $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$ cînd $n \to \infty$ căci y este arbitrar. Faptul că atît în prima, cît și în a doua situație $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$ cînd $n \to \infty$ a fost evidențiat de Gnedenko (lema 5 din [4]).

Privitor la șirurile $\{\beta_n\}$ și $\{\alpha_n + \beta_n\}$ putem face acum o observație ce ne va fi utilă.

În paragraful 1 am indicat un procedeu general pentru a afla numere admisibile α_n, β_n corespunzătoare fiecăreia din cele trei legi limită posibile. În particular luînd $U(x) = e^{-e^{-x}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ rezultă drept valoare admisibilă a lui β_n, cel mai mic x satisfăcînd dubla inegalitate: $F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F(x + 0)$ iar pentru $\alpha_n + \beta_n$ cel mai mic x satisfăcînd dubla inegalitate: $F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{ne} \leqslant F(x + 0)$.

Cum cel mai mic număr care satisface dubla inegalitate: $F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F(x + 0)$ nu poate fi mai mare decît cel mai mic număr care satisface dubla inegalitate: $F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant F(x + 0)$ urmează că $\beta_n \leqslant \beta_{n+1}$ și în mod analog se vede că $\alpha_n + \beta_n \leqslant \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$.

Așadar șirurile $\{\beta_n\}$; $\{\alpha_n + \beta_n\}$ pot fi socotite nedescrescătoare fără nici o pierdere a generalității.

Mai departe fie $\{\psi(n)\}$ un subșir al șirului numerelor naturale, funcția ψ fiind astfel încît: $\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n} = \lambda$ număr finit. De exemplu $\psi(n) = [\lambda n]$. Atunci din $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ urmează că $F^{\psi(n)}(\alpha_{\psi(n)} x + \beta_{\psi(n)}) \to e^{-e^{-x}}$ și deci $F^n(\alpha_{\psi(n)} x + \beta_{\psi(n)}) = (F^{\psi(n)}(\alpha_{\psi(n)} x + \beta_{\psi(n)}))^{n/\psi(n)} \to (e^{-e^{-x}})^{1/\lambda} = e^{-1/\lambda \cdot e^{-x}} = e^{-e^{-(x + \ln \lambda)}}$.

În consecință se aplică lema lui Hincin-Feller cu $A = 1$; $B = \ln \lambda$, astfel că:

$$\frac{\alpha_{\psi(n)}}{\alpha_n} \to 1; \quad \frac{\beta_{\psi(n)} - \beta_n}{\alpha_n} \to \ln \lambda.$$

Dacă $\lambda = 1$, α_n; β_n pot fi înlocuiți cu $\alpha_{\psi(n)}$, $\beta_{\psi(n)}$ fără nici o pierdere a generalității căci în acest caz $F^n(\alpha_{\psi(n)} x + \beta_{\psi(n)}) \to e^{-e^{-x}}$. Dacă $\lambda \neq 1$ atunci $\frac{(\beta_{\psi(n)} - \beta_n) : \ln \lambda}{\alpha_n} \to 1$, astfel că pe baza lemei lui Hincin-Feller:

$$F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}} \Leftrightarrow F^n\left(\frac{\beta_{\psi(n)} - \beta_n}{\ln \lambda} x + \beta_n\right) \to e^{-e^{-x}} \Leftrightarrow n\left(1 - F\left(\frac{\beta_{\psi(n)} - \beta_n}{\ln \lambda} x + \beta_n\right)\right) \to e^{-x}.$$

În particular dacă $\psi(n) = [\lambda n]$; $\lambda = e$ condiția necesară și suficientă devine:

$n(1 - F((\beta_{[ne]} - \beta_n)\, x + \beta_n) \to e^{-x}$ cînd $n \to \infty$, unde β_n este cel mai mic x care satisface dubla inegalitate: $F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F(x + 0)$.

Dacă F este funcție continuă atunci $F(x + 0) = F(x)$ și β_n este soluția ecuației $F(x) = 1 - \frac{1}{n}$ dacă ecuația admite o singură soluție respectiv cea mai mică soluție a acestei ecuații, dacă ecuația admite mai multe soluții.

Atunci cînd există un a_n avînd o formă mai simplă decît $\beta_{[ne]} - \beta_n$ și astfel ca $\beta_{[ne]} - \beta_n = a_n + 0(a_n)$, în loc de $\beta_{[ne]} - \beta_n$ se utilizează a_n căci $\frac{\beta_{(ne)} - \beta_n}{a_n} \to 1$. Astfel dacă $\beta_n = (\ln n)^{1/\alpha}$; $\beta_{[ne]} - \beta_n = (1 + \ln n)^{1/\alpha} - (\ln n)^{1/\alpha}$ iar drept a_n se poate lua $a_n = \frac{1}{\alpha} (\ln n)^{(1-\alpha)/\alpha}$ (partea principală a diferenței de mai sus) și nu $\frac{1}{\alpha} (\ln n)^{(\alpha-1)/\alpha}$ cum este indicat în [4] pagina 445).

Anterior arătasem că atunci cînd α_n, β_n sînt valori admisibile $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$ cînd $n \to \infty$. Prin urmare $\frac{(\beta_{\psi(n)} - \beta_n) : \ln \lambda}{\beta_n} \to 0$ adică $\frac{\beta_{\psi(n)}}{\beta_n} \to 1$ și în particular $\frac{\beta_{[ne]}}{\beta_n} \to 1$ cînd $n \to \infty$.

Desigur ar fi preferabil să se dispună de un procedeu simplu cu ajutorul căruia să se arate ce condiții trebuie să satisfacă F, fără a se recurge la numerele β_n. Un astfel de procedeu simplu, spre deosebire de cazul celorlalte două legi limită nu s-a găsit decît în cazuri particulare.

Rezultatul cel mai important în această privință se datorește lui von Mieses [6] și poate fi prezentat astfel:

Fie $x_0(F) = \sup \{x | F(x) < 1\}$. Dacă $F(x)$ este o funcție de repartiție cu densitatea $f(x)$ pozitivă și derivabilă într-o vecinătate la stînga a lui x_0 iar $\lim x \uparrow x_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{(1 - F(x)}{f(x)} \right)$ există și este egală cu 0, atunci există numere α_n, β_n astfel că $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ cînd $n \to \infty$.

Mai mult, dacă numim o funcție $F_X(x)$ care satisface condiția de mai sus, funcția von Mieses F_X corespunzătoare variabilei aleatoare X, atunci fiecărei funcții F astfel ca $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ îi corespunde o funcție von Mieses F_X astfel ca $x_0(F_X) = x_0(F) = x_0$ și $\lim x \uparrow x_0 \frac{1 - F(x)}{1 - F_X(x)} = 1$ și reciproc dacă unei funcții de repartiție F îi corespunde o funcție von Mieses F_X satisfăcînd cerințele de mai sus atunci există numere α_n, β_n astfel ca $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ cînd $n \to \infty$.

Această proprietate remarcabilă a fost găsită de A.A. Balkema și L. de Haan [7]. Valoarea aplicativă este însă redusă căci spre a se ajunge de la F la F_X drumul nu este simplu.

6. Este poate indicat să prezentăm acum sumar și condițiile necesare și suficiente găsite de Gnedenko [4] și Marcus și Pinsky [5] pentru F.

Gnedenko pornește de la observația sa că $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$ cînd $n \to \infty$. El scrie: $\alpha_n x + \beta_n = \beta_n\left(1 + \frac{\alpha_n}{\beta_n} x\right)$; introduce o funcție A definită pe mulțimea numerelor β_n în felul următor: $A(\beta_n) = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ și ține seama de faptul că atunci cînd $\beta_n \to x_0$ (x_0 definit ca mai sus), $A(\beta_n) \to 0$.

Cum $\{\beta_n\}$ constituie un șir nedescrescător tinzînd către x_0, orice z mai mic decît x_0 și suficient de apropiat de acesta este cuprins între doi termeni consecutivi, adecvați, ai acestui șir $\beta_s \leqslant z \leqslant \beta_{s+1}$. În continuare Gnedenko extinde domeniul de definiție al funcției A pe un interval $[\beta_m, x_0]$, m oarecare astfel ca A să fie funcție continuă pe acest interval iar pe fiecare subinterval $[\beta_s, \beta_{s+1}]$ să fie și monotonă. În felul acesta pe fiecare subinterval $[\beta_s, \beta_{s+1}]$; $A(z)$ este cuprins între $A(\beta_s)$ și $A(\beta_{s+1})$ iar $\lim z \uparrow x_0 A(z) = 0$.

Există desigur o infinitate de funcții care să satisfacă astfel de cerințe, de exemplu, o funcție liniară pe fiecare subinterval $[\beta_s, \beta_{s+1}]$ cu $A(\beta_s) = \frac{\alpha_s}{\beta_s}$, $A(\beta_{s+1}) = \frac{\alpha_{s+1}}{\beta_{s+1}}$. Pe un astfel de subinterval $[\beta_s, \beta_{s+1}]$ funcția A este crescătoare dacă $A(\beta_s) < A(\beta_{s+1})$, descrescătoare dacă $A(\beta_s) > A(\beta_{s+1})$, constantă dacă $A(\beta_s) = A(\beta_{s+1})$. De la $\alpha_n x + \beta_n = \beta_n\left(1 + \frac{\alpha_n}{\beta_n} x\right)$ se ajunge astfel la $z(1 + A(z)x)$ și Gnedenko demonstrează că atunci cînd $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$; $\lim z \uparrow x_0 \frac{1 - F(z(1 + A(z)\, x))}{1 - F(z)} = e^{-x}$ și aceasta pentru orice x și apoi și reciproca și anume: dacă A este o funcție continuă definită într-o vecinătate la stînga a lui x_0 cu $A(z) \to 0$ cînd $z \uparrow x_0$ și $\lim z \uparrow x_0 \frac{1 - F(z(1 + \mathrm{A}(z)\, x))}{1 - F(z)} = e^{-x}$ atunci există numere α_n, β_n astfel ca $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$.

Dacă o astfel de funcție A ar fi cunoscută, criteriul s-ar aplica cu ușurință, dar cum să se detecteze o astfel de funcție? Iată de ce criteriul cu toată formularea sa teoretică simplă este prea puțin operativ.

În ceea ce-i privește pe Marcus și Pinsky, aceștia au început prin a nota $1 - F(x) = e^{-g(x)}$ astfel că $n(1 - F(\alpha_n x + \beta_n)) = ne^{-g(\alpha_n x + \beta_n)} = e^{-g(\alpha_n x + \beta_n) + \ln n}$ și deci:

$$F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}} \Leftrightarrow n(1 - F(\alpha_n x + \beta_n)) \to e^{-x} \Leftrightarrow e^{-g(\alpha_n x + \beta_n) + \ln n} \to e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(\alpha_n x + \beta_n) - \ln n \to x.$$

Ei definesc apoi $g^{-1}(x) = min\ \{s \mid g(s) \geqslant x\}$ și observă pe baza unui rezultat al lui Gnedenko că atunci cînd $g(\alpha_n x + \beta_n) - \ln n \to x$ se poate lua $\beta_n = g^{-1}(\ln n)$, $\alpha_n = g^{-1}(1 + \ln n) - g^{-1}(\ln n)$. În continuare ei introduc funcțiile $b(s) = g^{-1}(\ln s)$; $a(s) = g^{-1}(1 + \ln s) - g^{-1}(\ln s)$; $s > 0$ și arată că $a(s)$ este o funcție cu variația înceată, adică pentru orice $u > 0$, $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{a(su)}{a(s)} = 1$. Apoi din $g(\alpha_n x + \beta_n) - \ln n \to x$ deduc că $g(\alpha_n x + \beta_n) \sim \ln n + x$ și de aici că $g^{-1}(x + \ln n) - g^{-1}(\ln n) \sim x a_n$ dovedind apoi că este valabilă relația mai generală: $g^{-1}(x + \ln s) - g^{-1}(\ln s) \sim x a(s)$ adică $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{g^{-1}(x + \ln s) - g^{-1}(\ln s)}{a(s)} = x$.

Cele de mai sus explică cum s-a ajuns la condiția a) din teorema I-a a lui Marcus și Pinsky pe care o prezentăm acum, nefiind greu să se înțeleagă și cum s-a ajuns la condiția b).

Teorema I. Pentru ca $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ sînt necesare și suficiente următoarele condiții:

a) $g^{-1}(x + \ln s) - g^{-1}(\ln s) \sim x a(s) : (s \to \infty)$ unde $a(s)$ variază încet;

b) $g^{-1}(\ln s) = \int_1^x \dfrac{a(s)}{s}\, ds + \varphi(x)$ unde $a(s)$ este o funcție arbitrară cu variația înceată și $\dfrac{\varphi(su) - \varphi(s)}{a(s)} \to 0$; ($u$ un număr pozitiv mai mare decît 0).

De altfel ei dau și o a doua teoremă:

Teorema II. Dacă $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ atunci: a) $g^{-1}(\ln x)$ este o funcție cu variația înceată; b) $g^{-1}(\ln x) \sim \int_1^x \dfrac{a(s)}{s}\, ds$, unde $a(s)$ este funcția cu variația înceată din teorema I.

Dacă condițiile a) și b) ale teoremei I sînt îndeplinite, se poate lua desigur drept $a(s)$ din teoremă, cel de mai înainte, adică $a(s) = g^{-1}(1 + \ln s) - g^{-1}(\ln s)$ și drept $b(s)$, $g^{-1}(\ln s)$.

Am căutat să scoatem în evidență mecanismul rezultatelor obținute de Marcus și Pinsky spre a se vedea că dacă din punct de vedere teoretic ei rezolvă complet problema, tehnica lor nu este simplă, procedeul indicat de noi în penultima parte a § 5, reprezentînd o simplificare a unui rezultat anterior a lui Gnedenko, fiind în genere mai operativ, iar condițiile formulate acolo mai simple. Într-adevăr acolo s-a cerut ca: $n(1 - F((\beta_{[ne]} - \beta_n)x + \beta_n) \to e^{-x}$ unde β_n este cel mai mic x astfel ca $F(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} < F(x + 0)$ și o dată ce expresia pentru β_n este găsită; $\beta_{[ne]}$ se obține înlocuind în aceasta pe n cu $[ne]$.

7. În anumite cazuri particulare se pot găsi condiții simple și în cazul legii limită dublu exponențiale. Astfel dacă $\alpha_n \to a \neq 0$ (desigur $a > 0$) și deci conform celor de la § 5, $b_n \to \infty$, o condiție necesară și suficientă pentru

ca $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ este ca F să îndeplinească următoarea condiție: $\lim_{y\to\infty} \frac{1 - F(ax + y)}{1 - F(y)} = e^{-x}$ pentru orice x.

Iată cum se justifică această aserțiune. Întrucît $\alpha_n \to a$ și deci $\frac{\alpha_n}{a} \to 1$; $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}} \Leftrightarrow F^n(ax + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ (lema lui Hincin-Feller) adică $n(1 - F(ax + \beta_n)) \to e^{-x}$. Cum $\beta_n \to \infty$ cînd $n \to \infty$ pentru orice y la dreapta unui β_m oarecare există un s astfel ca $\beta_s \leqslant y \leqslant \beta_{s+1}$. În consecință: $1 - F(ax + \beta_{s+1}) \leqslant 1 - F(ax + y) \leqslant 1 - F(ax + \beta_s)$ și în particular $1 - F(\beta_{s+1}) \leqslant 1 - F(y) \leqslant 1 - F(\beta_s)$. Prin urmare:

$$\frac{1 - F(ax + \beta_{s+1})}{1 - F(\beta_s)} \leqslant \frac{1 - F(ax + y)}{1 - F(y)} \leqslant \frac{1 - F(ax + \beta_s)}{1 - F(\beta_{s+1})}$$

adică:

$$\frac{s}{s+1} \cdot \frac{(s+1)(1 - F(ax + \beta_{s+1}))}{s(1 - F(\beta_s))} \leqslant \frac{1 - F(ax + y)}{1 - F(y)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s(1 - F(ax + \beta_s))}{(s+1)(1 - F(\beta_{s+1}))}.$$

Ținînd seama de faptul că atunci cînd $s \to \infty$; $s(1 - F(ax + \beta_s)) \to e^{-x}$; $s(1 - F(\beta_s)) \to 1$ etc. iar cînd $y \to \infty$ desigur că și $s \to \infty$, se vede că atunci cînd $y \to \infty$ cei doi termeni extremi ai dublei inegalități de mai sus tind către e^{-x}, deci și termenul din mijloc tinde către aceeași limită. Necesitatea condiției anunțate este dovedită.

Să arătăm acum că este și suficientă.

Aici pornim de la faptul că $F(\beta_n) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F(\beta_n + 0) \leqslant F(a\varepsilon' + \beta_n)$ cu $\varepsilon' > 0$ oarecare, fapt din care rezultă:

$$n(1 - F(a\varepsilon' + \beta_n) \leqslant 1 \leqslant n(1 - F(\beta_n)),$$

așa că:

$$\frac{n(1 - F(ax + \beta_n))}{n(1 - F(\beta_n))} - e^{-x} \leqslant \frac{n(1 - F(ax + \beta_n))}{1} - e^{-x} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n(1 - F(ax + \beta_n))}{n(1 - F(a\varepsilon' + \beta_n)} - e^{-x}.$$

Cînd $n \to \infty$, $\beta_n \to \infty$ și membrul din stînga tinde conform ipotezei la $e^{-x} - e^{-x} = 0$. Membrul din dreapta se mai poate scrie

$$\frac{1 - F(ax + \beta_n)}{1 - F(\beta_n)} : \frac{1 - F(a\varepsilon' + \beta_n)}{1 - F(\beta_n)} - e^{-x}$$

și el tinde către $e^{-x} : e^{-\varepsilon'} - e^{-x} = (e^{\varepsilon'} - 1)\, e^{-x}$. Dacă se ia $(e^{\varepsilon'} - 1)\, e^{-x} = \frac{\varepsilon}{2}$ adică $\varepsilon' = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{x}\right)$, limita membrului din dreapta este $\frac{\varepsilon}{2}$.

Din acestea rezultă că există un număr natural $n_0(\varepsilon)$ astfel că pentru $n > n_0(\varepsilon)$: $-\varepsilon < n(1 - F(ax + \beta_n) - e^{-x} < \varepsilon$. Cum ε este oarecare rezultă: $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(ax + \beta_n) = e^{-x}$. Suficiența condiției este dovedită.

Să sintetizăm unele din rezultatele obținute:

1°. Pentru ca să existe numere α_n și β_n astfel ca:

$F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-x^{-\beta}}$ este necesar și suficient ca pentru orice $K > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)} = K^{\beta}.$$

În particular dacă $\lim_{x\to\infty} x^{\beta}(1 - F(x))$ există și este un număr finit diferit de 0, condiția de mai sus este satisfcăută căci $\frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)} = K^{\beta} \frac{x^{\beta}(1 - F(x))}{(Kx)^{\beta}(1 - F(Kx))}$ și atunci cînd $x \to \infty$ atît numărătorul cît și numitorul ultimei fracții au aceeași limită, diferită de 0, astfel că $\frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)}$ tinde către K^{β}.

Desigur este posibil ca $x^{\beta}(1 - F(x))$ să nu satisfacă cerința de mai sus și totuși $\frac{1 - F(x)}{1 - F(Kx)}$ să tindă către K^{β}. De aceea am menționat că este vorba de un caz particular.

2°. $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-(-x)^{\beta}}$. În acest caz există un x_0 finit astfel ca $F(x_0) = 1$, $F(x_0 - \varepsilon) < 1$ pentru orice $\varepsilon > 0$ și în plus trebuie ca $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1 - F(Kx + x_0)}{1 - F(x + x_0)} = K^{\beta}$ pentru orice $K > 0$.

Aceste condiții sînt necesare și suficiente.

În particular dacă $\lim_{x \uparrow 0} x^{\beta}(1 - F(x + x_0))$ există și este un număr finit diferit de 0, condiția de mai sus este satisfăcută după cum se vede, la fel ca în cazul 1°.

3°. $F^n(\alpha_n x + \beta_n) \to e^{-e^{-x}}$ și $\alpha_n \to a \neq 0$. În acest caz o condiție necesară și suficientă este ca $\lim_{y\to\infty} \frac{1 - F(ax + y)}{1 - F(y)} = e^{-x}$ pentru orice x finit.

În particular dacă $\lim_{y\to\infty} e^{-\frac{y}{a}}(1 - F(y))$ există și este un număr finit diferit de 0, condiția de mai sus este satisfăcută.

O dată cu acestea am terminat expunerea privitoare la legile limită pentru valorile extremale. În articolul următor se va vedea dacă, cum și în ce măsură rezultatele obținute pot fi folosite în controlul statistic global.

BIBLIOGRAFIE

1. THEILER G., TÖVISSI L.: *Valori extremale, repartiția Weibull și unele probleme de control statistic global.* Studii și cercetări de calcul economic și cibernetică economică, nr. 4, 1976.
2. FELLER W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. II, John Wiley and Sons, New York, 1966.
3. GNEDENKO B. W., KOLOMOGOROV A. N.: *Grenzverteilungen von Summen unabhängigen Zufallgrössen.* Akademie Verlag, Berlin, 1960.
4. GNEDENKO B. W.: *Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aléatoire.* Annals of Mathematics, Vol. 44, nr. 3, (VII. 1943).
5. MARCUS M., PINSKY M.: *On the Domain of Attraction of* $e^{-e^{-x}}$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 28; 2; XI, 1969.
6. MIESES VON R.: *La distribution de la plus grande des n valeurs.* Revue Mathematique de l'union interbalkanique, t.I.f. 1, p., 141—160, 1939; sau Selected Papers of Richard von Mieses II, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1964.
7. BALKEMA A. A., HAAN L.: *On R von Mieses condition for the Domain of Attraction of exp.* ($-e^{-x}$). The Annals of Mathematical Statistics, vol. 43, 4, 1972.

26.IX.1976

C. BARON
Catedra de cibernetică
economică — A.S.E.

Funcții de structură și rețele de fiabilitate

Avînd în vedere importanța deosebită a funcției de structură în studiul fiabilității unui sistem, în prima parte a lucrării sînt prezentate unele concepte de bază. Considerînd folosirea calculatorului electronic ca indispensabilă în studiul structurii și fiabilității sistemelor complexe se prezintă și algoritmii corespunzători pentru determinarea legăturilor și întreruperilor unui sistem pe baza cărora se elaborează funcția de structură a sistemului și se tratează rețeaua de fiabilitate echivalentă.

În a doua parte a lucrării, se prezintă modul în care se poate defini un sistem prin rețeaua sa de fiabilitate, precum și modul de elaborare a funcției de fiabilitate a sistemului plecînd de la funcția sa de structură.

Pentru înțelegerea conceptelor și metodelor prezentate, articolul conține și cîteva exemple prin care se subliniază importanța practică a cunoașterii structurii sistemelor pentru calculul fiabilității lor.

Majoritatea produselor reprezintă o asociere de elemente (componente), adică un ansamblu, un sistem de elemente grupate și utilizate într-un anumit mod. Pentru calculul fiabilității unui sistem este necesar să se cunoască structura și caracterul funcționării, sau altfel spus, legătura dintre fiabilitatea elementelor și cea a sistemului.

Așadar, a descrie structura unui sistem înseamnă a pune în evidență modul în care starea sistemului este influențată de starea elementelor sale.

Asupra structurii și funcționării sistemului se presupun îndeplinite următoarele ipoteze:

1. Sistemul se poate afla în orice moment numai în una din stările: funcționează sau este defect.

2. Sistemul se compune dintr-un număr de n elemente, numerotate de la 1 la n, astfel încît orice element al său poate fi la un moment dat în stare de

funcționare sau în stare de defectare; starea întregului sistem depinde numai de starea elementelor sale.

Unui astfel de sistem i se asociază o funcție de structură sau, cu anumite rezerve, o rețea de fiabilitate care se dovedește a fi de o importanță deosebită în studiul fiabilității sistemelor.

1. FUNCȚII DE STRUCTURĂ

Fie un sistem S și ansamblul său de elemente

$$e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}. \tag{1}$$

Asociind o variabilă de stare x_i fiecărui element e_i astfel ca:

$x_i = 1$, dacă elementul e_i este în stare de funcționare,

$x_i = 0$, dacă elementul e_i este defect,

se obține ansamblul de stări de ordinul n

$$(x) = (x_1, x_2, ..., x_n), \tag{2}$$

din care rezultă că pot fi 2^n stări diferite ale ansamblului de elemente e.

Dacă se asociază sistemului S o variabilă de stare y astfel ca:

$y = 1$ dacă sistemul S este în stare de funcționare,

$y = 0$ dacă sistemul S este defect,

se obține o funcție în care y depinde de (x) care se scrie:

$$y = f(x) \text{ sau } y = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{3}$$

Această funcție ce depinde de cele n variabile x este *funcția de structură* a sistemului S[1].

Legătura unui sistem. Dacă în ansamblul e se definește un subansamblu de elemente:

$$a = \{e_i, i \in I\} \subset e, \text{ unde } I \subset \{1, 2, ..., n\} \tag{4}$$

și dacă

$$\left.\begin{array}{ll} x_i = 1, & i \in I \\ x_i = 0, & i \notin I \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1, \tag{5}$$

se spune că în cadrul sistemului S există o „legătură", adică un subansamblu de elemente, astfel că dacă toate elementele acestui subansamblu sînt în funcțiune iar celelalte elemente ale sistemului sînt defecte, atunci sistemul este în funcțiune (v. fig. 1).

Legătură minimală. Dacă există un ansamblu de legătură a, astfel că nu există un alt subansamblu $a' \subseteq a$, care să fie o legătură, se spune că a este o „legătură minimală" sau un subansamblu minimal de legătură.

Întreruperea unui sistem. Dacă în ansamblul e se definește un subansamblu de elemente:

$$b = \{e_j, j \in J\} \subset e, \text{ unde } J \subset \{1, 2, ..., n\} \tag{6}$$

astfel încît:

$$\left.\begin{array}{ll} x_j = 0, & j \in J \\ x_j = 1, & j \notin J \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \qquad (7)$$

se spune că în cadrul sistemului S există o „întrerupere", adică un subansamblu de elemente, astfel că dacă toate elementele acestui subansamblu sînt defecte și dacă celelalte elemente ale sistemului sînt în funcțiune, sistemul este defect (v. fig. 1).

Întrerupere minimală. Dacă există un subansamblu de întrerupere b, astfel că nu există un alt subansamblu $b' \subseteq b$, care să fie de întrerupere, se spune că b este o „întrerupere minimală" sau un subansamblu minimal de întrerupere [1].

2. TIPURI DE STRUCTURI

Structură serie. Fie funcția de structură (3). Dacă

$$y = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$$

$$y = \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad (8)$$

atunci această funcție de structură este proprie unui sistem care poate funcționa numai dacă toate elementele sale sînt în stare de funcționare:

$$(\forall i,\ x_i = 1) \Rightarrow (y = 1),$$

$$(\exists i : x_i = 0) \Rightarrow (y = 0).$$

Un astfel de sistem are o structură de tip serie, adică elementele sînt legate în serie [1].

Din relația [8] se observă că singura stare din cele 2^n stări diferite ale ansamblului de elemente al sistemului pentru care $y = 1$ este $(x) = \{1, 1, \ldots 1\}$.

Aceasta înseamnă că, potrivit relației (5), în cadrul sistemului există un singur subansamblu de legătură, acesta fiind chiar ansamblul de elemente al sistemului $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

De asemenea, conform relației (7), în cadrul sistemului există n subansambluri de întrerupere, acestea fiind chiar cele n elemente ale sistemului.

Structură paralelă. Revenind la funcția de structură (3), dacă

$$y = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n)$$

$$y = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \qquad (9)$$

atunci această funcție de structură este proprie unui sistem care poate funcționa numai dacă cel puțin unul din elementele sale este în stare de funcționare:

$$(\exists i : x_i = 1) \Rightarrow (y = 1)$$

$$(\forall i : x_i = 0) \Rightarrow (y = 0)$$

Un astfel de sistem are o structură de tip paralel, adică elementele sînt legate în paralel [1].

Din relația (9) se observă că singura stare din cele 2^n stări diferite ale ansamblului de elemente al sistemului pentru care $y = 0$ este $(x) = \{0, 0, ..., 0\}$.

Aceasta înseamnă că, potrivit relației (7), în cadrul sistemului există un singur subansamblu de întrerupere, acesta fiind chiar ansamblul de elemente al sistemului $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

De asemenea, conform relației (5) în cadrul sistemului există n subansambluri de legătură, acestea fiind chiar cele n elemente ale sistemului.

Structură mixtă. Conform relațiilor (5) și (7) funcția de structură a unui sistem cu structură mixtă poate fi:

$$f(x) = 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \prod_{\substack{i \\ e_i \in a_j}} x_i) \tag{10}$$

(în care: a_j, $j = 1, 2, ..., k$ sînt subansamblurile minimale de legătură), sau

$$f(x) = \prod_{j=1}^{k} [1 - \prod_{\substack{i \\ e_i \in b_j}} (1 - x_i)] \tag{11}$$

(în care: b_j, $j = 1, 2, ..., k$ sînt subansamblurile minimale de întrerupere).

Se observă că relația (10) reprezintă o dezvoltare a relației (9) în care variabila de stare x_i asociată elementului e_i este înlocuită cu $\prod_i x_i$ pentru care $e_i \in a_j$, iar numărul termenilor produsului este egal cu numărul de legături minimale k.

În mod analog, relația (11) reprezintă o dezvoltare a relației (8) în care variabila de stare x_i asociată elementului e_i este înlocuită cu $1 - \prod_i (1 - x_i)$ pentru fiecare $e_i \in b_j$, iar numărul termenilor produsului este egal cu numărul de întreruperi k.

Deoarece variabila de stare x_i nu poate lua decît valoarea 0 sau 1, relațiile (10) și (11) sînt polinoame de gradul întîi în care $(x_i)^r = x_i$, $r = 1, 2, ...$ În consecință, funcția de structură a unui sistem cu structură mixtă se poate simplifica în raport cu variabila de stare x_i, ajungîndu-se astfel la o formă mai simplă în comparație cu relațiile generale (10) și (11).

Exemple: 1) Fie funcția de structură $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ și structura dată în figura 1.

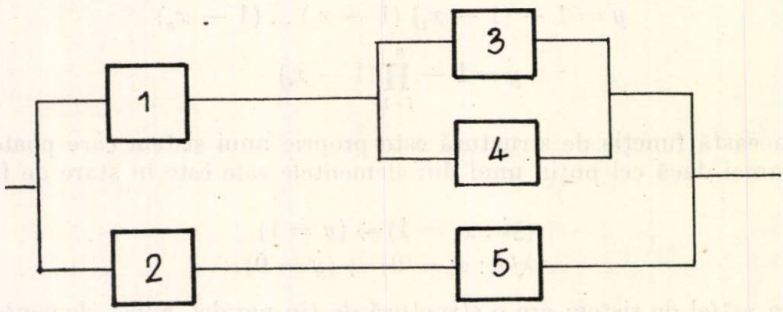


fig. 1

Analizînd structura din fig. 1 (care este o structură mixtă) potrivit relațiilor (5) și (7) se observă că sistemul cuprinde:

— 3 subansambluri minimale de legătură:

$$\{e_1, e_3\},\ \{e_1, e_4\},\ \{e_2, e_5\};$$

— 4 subansambluri minimale de întrerupere:

$$\{e_1, e_2\},\ \{e_1, e_5\},\ \{e_2, e_3, e_4\},\ \{e_3, e_4, e_5\}.$$

Funcția de structură corespunzătoare sistemului din fig. 1 se poate scrie, conform relațiilor (10) și (11) astfel:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1 - (1 - x_1x_3)(1 - x_1x_4)(1 - x_2x_5) \tag{12}$$

și respectiv:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [1 - (1 - x_1)(1 - x_2)][1 - (1 - x_1)(1 - x_5)] \cdot$$
$$[1 - (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)][1 - (1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_5)]. \tag{13}$$

Știind că $(x_i)^r = x_i$, $r = 1, 2, 3, \ldots$ și făcînd simplificările necesare cele două funcții de structură (12) și (13) sînt echivalente cu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_5 - x_1x_3x_4 - x_1x_2x_3x_5 - x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5. \tag{14}$$

Aceasta înseamnă că, structura unui sistem poate fi analizată, fie pe baza conceptului de legătură, fie pe baza conceptului de întrerupere.

2) Fie funcția de structură $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ și structura dată în fig. 2.

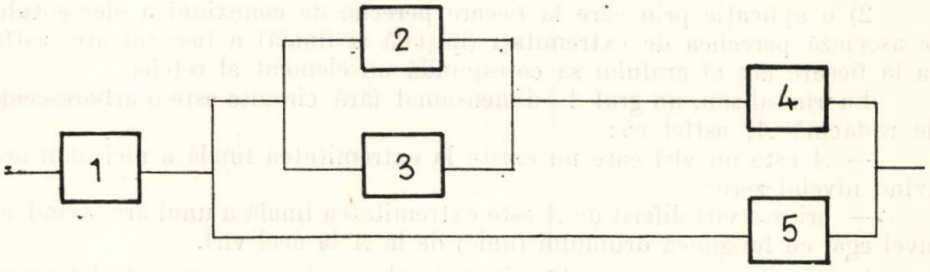


fig. 2

Analizînd structura din fig. 2 (care este de asemenea o structură mixtă) potrivit relațiilor (5) și (7) se observă că sistemul conține:

— 3 subansambluri minimale de legătură:

$$\{e_1, e_5\},\ \{e_1, e_2\ e_4\},\ \{e_1, e_3\ e_4\};$$

— 3 subansambluri minimale de întrerupere:

$$\{e_1\},\ \{e_4, e_5\},\ \{e_2, e_3, e_5\}.$$

Folosind oricare din relațiile (10) sau (11) și făcînd simplificările necesare, funcția de structură a sistemului din fig. 2 se poate scrie:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_5 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_4x_5 - \\ - x_1x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5. \quad (15)$$

Comparînd cele două funcții de structură (14) și (15) se poate constata că pentru două sisteme care au același număr de elemente, dar al căror mod de legare diferă, funcțiile de structură corespunzătoare sînt diferite.

Această constatare are o deosebită importanță practică pentru calculul fiabilității și disponibilității sistemelor.

3. DETERMINAREA LEGĂTURILOR ȘI ÎNTRERUPERILOR UNUI SISTEM

După cum rezultă din paragraful precedent, elaborarea unei funcții de structură a unui sistem este simplă dacă se cunosc toate subansamblurile de elemente care constituie legăturile minimale, sau întreruperile minimale ale sistemului [1]. Cu alte cuvinte, înainte de elaborarea funcției de structură a unui sistem este necesar să se determine fie subansamblurile minimale de legătură, fie subansamblurile minimale de întrerupere ale sistemului.

Cercetarea structurii unui sistem pentru determinarea legăturilor și întreruperilor minimale se bazează pe relația dintre rețeaua de elemente a sistemului și graful asociat rețelei [1]. Astfel, o rețea $\mathfrak{R}$ definită de ansamblul de elemente e_i poate fi descrisă de:

1) un graf n - dimensional $G = (X, W)$ fără bucle, unde X este ansamblul de vîrfuri (sau noduri) iar W este ansamblul de arce și în care două vîrfuri $O \in X$ și $Z \in X$ sînt distincte și denumite origine și respectiv extremitate;

2) o aplicație prin care la fiecare pereche de conexiuni a elementului se asociază perechea de extremități (inițială și finală) a fiecărui arc, astfel ca la fiecare arc al grafului să corespundă un element al rețelei.

La rîndul său, un graf 1 - dimensional fără circuite este o arborescență de rădăcină A, astfel că:

— A este un vîrf care nu există la extremitatea finală a nici unui arc, avînd nivelul zero;

— oricare vîrf diferit de A este extremitatea finală a unui arc, avînd un nivel egal cu lungimea drumului (unic) de la A la acel vîrf.

Legăturile și întreruperile minimale ale unui sistem se pot determina fie prin observarea directă a relațiilor topologice ale rețelei de elemente, fie cu ajutorul unor algoritmi care implică folosirea calculatorului electronic.

Observarea directă se poate aplica în cazul cînd sistemul considerat are o structură relativ simplă și volumul de operații de cercetare a topologiei rețelei este redus. În primul rînd se determină toate legăturile minimale ale rețelei, apoi o dată cunoscute aceste legături se pot folosi pentru determinarea subansamblurilor de întreruperi care conțin toate întreruperile minimale ale rețelei [1].

Astfel, dacă fiecărui drum elementar $u = (w_1, ..., w_i) \in C$ (C este ansamblul de drumuri elementare ale grafului G) i se asociază legătura $a(u)$ care

reprezintă elementele corespondente arcelor drumului, se obține din ansamblul C:

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{u \in C} \{a(u)\} \tag{16}$$

unde $\mathfrak{L}$ este ansamblul care conține legăturile rețelei $\mathfrak{R}$. Ținînd seama apoi de conceptul de legătură minimală, se elimină din fiecare legătură elementele subansamblului $a'' = a - a'$, unde $a' \subseteq a$, obținîndu-se legăturile minimale.

În continuare se determină întreruperile minimale ale rețelei $\mathfrak{R}$. Astfel, dacă din fiecare legătură minimală $a \subset e$ se preia cîte un element se obține un subansamblu de elemente $b(a)$, care potrivit conceptului de întrerupere constituie o întrerupere a rețelei $\mathfrak{R}$. Apoi din ansamblul de legături $\mathfrak{L}$ se obține:

$$\mathfrak{I} = \bigcup_{a \in \mathfrak{L}} \{b(a)\} \tag{17}$$

unde $\mathfrak{I}$ este ansamblul care conține toate întreruperile rețelei $\mathfrak{R}$. Ținînd seama de conceptul de întrerupere, se elimină din fiecare întrerupere, elementele care aparțin subansamblului $b'' = b - b'$, unde $b' \subseteq b$, obținîndu-se în cele din urmă ansamblul de întreruperi minimale ale rețelei $\mathfrak{R}$.

Folosirea calculatorului electronic pentru determinarea legăturilor și întreruperilor minimale ale unui sistem este necesară în cazul cînd sistemul considerat are o structură destul de complexă în scopul:

— de a micșora efortul de cercetare a topologiei rețelei de elemente;

— de a evita omiterea unor legături (sau întreruperi) ale rețelei și redondanța în determinarea legăturilor (sau întreruperilor).

Există mai mulți algoritmi pentru cercetarea structurii sistemelor cu ajutorul calculatorului electronic diferențiați pe determinarea legăturilor sau întreruperilor [1], [2]. Astfel, pentru determinarea legăturilor se pot folosi, în general, algoritmii cunoscuți din teoria grafelor (pentru găsirea drumurilor elementare), iar pentru determinarea întreruperilor se pot folosi algoritmi care se bazează pe legăturile sistemului sau algoritmi independenți de aceste legături. În continuare se prezintă un algoritm original pentru determinarea legăturilor minimale ale unui sistem bazat pe conceptul de succesiune a elementelor sistemului și un algoritm îmbunătățit pentru determinarea întreruperilor minimale ale unui sistem, bazat pe logica booleană care are ca punct de plecare legăturile sistemului.

Determinarea legăturilor minimale ale unui sistem. Acest algoritm se bazează pe faptul că, orice element al unei rețele este urmat (mărginit la dreapta) de un alt element (sau de alte elemente). Face excepție de la această regulă ultimul element (sau ultimele elemente) din rețea pentru care succesorul este extremitatea Z a grafului. Relațiile dintre elementele rețelei bazate pe conceptul de succesiune se introduc și se păstrează în memoria calculatorului electronic sub forma unei matrice de succesori. Această matrice constituie de fapt singurele date inițiale ale algoritmului.

Folosirea acestui algoritm implică parcurgerea a două etape distincte. În prima etapă se generează drumurile elementare ale grafului, iar în a doua etapă se determină legăturile minimale. Generarea drumurilor elementare necesită, pe de o parte, fixarea rădăcinii arborelui asociat grafului, iar pe de altă parte, înlănțuirea arcelor pentru formarea drumurilor. Rădăcina arborelui este de fapt originea O a grafului. În acest caz înlănțuirea arcelor se face

în ordinea normală (crescătoare) a numerelor pe care elementele le au în cadrul rețelei.

Fixarea rădăcinii arborelui asociat grafului se poate reprezenta prin relația:

$$m_{11} = m_{21} = \ldots = m_{(i-1)1} = m_{i1} = \alpha \tag{18}$$

unde $\{\alpha/\alpha \in N \wedge \alpha \geqslant 1\}$, și m_{ij} este termenul general al matricei $[M]$ care conține drumurile elementare ale grafului.

Înlănțuirea arcelor pentru formarea drumurilor elementare se poate reprezenta, la rîndul ei, în cazul cînd un element are un singur succesor, prin relațiile:

$$\begin{aligned} k &= m_{ij-1} \\ m_{ij} &= d_{kr} \end{aligned} \tag{19}$$

iar în cazul cînd un element are mai mulți succesori, prin relațiile:

$$\begin{aligned} k &= m_{i-1\,j-1} \\ m_{ij} &= d_{kr} \end{aligned} \tag{20}$$

unde m_{ij} are semnificația de mai sus, d_{kr} este termenul general al matricei de succesori și k este o variabilă intermediară (de înlănțuire).

Determinarea legăturilor minimale (a doua etapă a algoritmului) implică transformarea matricei $[M]$ într-o matrice binară $[L]$ pe baza relațiilor:

$$\begin{aligned} p &= m_{ij-1} \\ r_p &= 1 \\ l_{ij} &= r_j \end{aligned} \tag{21}$$

unde p este o variabilă intermediară, r_p este un vector intermediar, m_{ij} este termenul general al matricei $[M]$ și l_{ij} este termenul general al matricei $[L]$. Prin aceste relații, se obține matricea binară $[L]$ ai cărei termeni nenuli reprezintă elementele care alcătuiesc legăturile minimale ale rețelei. Scrierea acestor legături necesită o procedură de listare obișnuită.

Determinarea întreruperilor minimale ale unui sistem. Acest algoritm se poate folosi atunci cînd legăturile minimale ale rețelei de elemente au fost deja determinate [2]. Astfel, din matricea binară $[L]$ și pe baza logicii booleane se generează o altă matrice binară $[I]$ care conține toate întreruperile minimale ale rețelei.

Generarea matricei $[I]$ implică, pe de o parte, analiza vectorilor coloană ai matricei $[L]$ pentru identificarea întreruperilor, iar pe de altă parte, analiza întreruperilor pentru determinarea întreruperilor minimale.

Identificarea întreruperilor se face separat pe grupe de întrerupere cu un element și respectiv cu mai multe elemente. Astfel, ca un singur element al rețelei să fie o întrerupere, vectorul său coloană în matricea $[L]$ trebuie să fie vectorul unitate (1, ..., 1), adică:

$$L_{ci} = 1, \text{ pentru toți } i = 1, 2, \ldots, I \tag{22}$$

unde L_{ci} este vectorul coloană de ordinul c și I este numărul legăturilor minimale.

Pentru întreruperi cu două elemente se consideră $L_{ci} + L_{di}$, $c \neq d$, unde $+$ este suma logică.

Dacă

$$L_{ci} + L_{di} = 1 \text{ pentru toți } i = 1, 2, ..., I \tag{23}$$

atunci elementele c și d constituie o întrerupere de două elemente.

În acest fel se poate proceda și pentru obținerea întreruperilor cu trei, patru etc. elemente.

Determinarea întreruperilor minimale se bazează pe înmulțirea logică a doi vectori. Astfel, după ce o întrerupere posibilă de ordinul M a fost indentificată, aceasta se confruntă cu toate întreruperile de ordinul $M - 1$, $M - 2$, ..., 1 prin înmulțirea logică a vectorilor linie corespunzători. Dacă vectorul produs are ordinul întreruperii $M - 1$ sau $M - 2$ etc., atunci întreruperea de ordinul M conține o altă întrerupere minimală. În acest caz întreruperea de ordinul M nu este o întrerupere minimală. Scrierea întreruperilor minimale se poate face, de asemenea, printr-o procedură de listare obișnuită.

4. REȚELE DE FIABILITATE

Fie rețeaua $\mathfrak{R}$ definită de ansamblul de elemente $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ și graful n — dimensional $G = (X, W)$ fără bucle asociat rețelei $\mathfrak{R}$.

Se numește „legătură" a unei rețele $\mathfrak{R}$ un subansamblu $a \subset e$ de elemente astfel ca subansamblul de arce $W_p(a)$ al grafului parțial $G_p(a)$ să fie un drum în graful G.

De asemenea, se numește „întrerupere" a unei rețele $\mathfrak{R}$ un subansamblu $b \subset e$ de elemente astfel ca subansamblul de arce $W_p(b)$ al grafului parțial $G_p(b)$ să fie o întrerupere a grafului G.

Într-o rețea, o legătură a este minimală dacă nici un alt subansamblu $a' \subseteq a$ nu este o legătură a rețelei, iar o întrerupere b este minimală dacă nici un alt subansamblu $b' \subseteq b$ nu este o întrerupere a rețelei.

Definirea unui sistem printr-o rețea de fiabilitate. Fiind dată o rețea de fiabilitate $\mathfrak{R}$ și considerînd sistemul S cu ansamblul său de elemente $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, pentru orice stare a ansamblului de elemente în care elementele subansamblului e_1 sînt în stare de funcționare și cele ale subansamblului complementar $\bar{e}_1$ sînt defecte, sistemul funcționează dacă e_1 este o legătură a rețelei de fiabilitate $\mathfrak{R}$ și este defect în caz contrar. Funcția sa de structură $f(x_1, ..., x_n)$ ia valoarea 1 pentru orice stare $x = (x_1, ..., x_n)$ dacă subansamblul de elemente pentru care $x_i = 1$ este o legătură a rețelei; acest subansamblu este de asemenea o legătură a funcției de structură. Dacă subansamblul de elemente nu este o legătură a rețelei, atunci $f(x_1, ..., x_n)$ ia valoarea 0 și subansamblul de elemente nu este o legătură a funcției de structură. Se poate deduce că cele de mai sus sînt valabile și în cazul întreruperilor, atît pentru rețeaua de fiabilitate, cît și pentru funcția de structură [1].

Exemplu.
Fie rețeaua din fig. 3 unde:

$$e = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$X = \{O, Z, A, B\}$$

$$W = \{(O, A), (O, B), (A, Z)_1, (A, Z)_2, (B, Z)\}$$

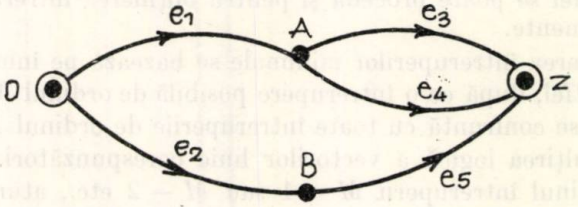


fig. 3

Se observă că această rețea corespunde sistemului cu structura din fig. 1 deoarece:

$$\{(O, A), (A, Z)_1\} \Leftrightarrow \{e_1, e_3\}$$

$$\{(O, A), (A, Z)_2\} \Leftrightarrow \{e_1, e_4\}$$

$$\{(O, B), (B, Z)\} \Leftrightarrow \{e_2, e_5\}$$

și respectiv:

$$\{(O, A), (O, B)\} \Leftrightarrow \{e_1, e_2\}$$

$$\{(O, A), (B, Z)\} \Leftrightarrow \{e_1, e_5\}$$

$$\{(O, B), (A, Z)_1 (A, Z)_2\} \Leftrightarrow \{e_2, e_3, e_4\}$$

$$\{(A, Z)_1, (A, Z)_2 (B, Z)\} \Leftrightarrow \{e_3, e_4, e_5\}.$$

Funcția de fiabilitate. Fie X_i variabila aleatoare care reprezintă starea elementului e_i la momentul t. Considerînd că:

$X_i = 1$, dacă e_i este în stare de funcționare
$X_i = 0$, dacă e_i este defect (24)

atunci:

$$pr\{X_i = 1\} = p_i$$
$$pr\{X_i = 0\} = 1 - p_i. \quad (25)$$

Deoarece $(X) = (X_1, X_2, ..., X_n)$ este ansamblul de stări aleatoare al sistemului, atunci există o funcție:

$$F = f(X) \text{ sau } F = f(X_1, X_2, ..., X_n). \quad (26)$$

Această funcție care depinde de variabilele $X_1, X_2, ..., X_n$ este funcția aleatoare de structură a sistemului [1].
Speranța matematică a acestei funcții fiind:

$$E(F) = E[f(X)] = 1 \times pr\{F = 1\} + O \times pr\{F = 0\} = pr\{F = 1\} \quad (27)$$

atunci funcția:

$$h(p_1, p_2, ..., p_n) = E[f(X)] \tag{28}$$

se numește funcția de fiabilitate a sistemului [1].

Se înțelege că $E[f(X)]$ este o funcție a fiabilităților $p_1, p_2, ..., p_n$ ale elementelor care definesc legile de probabilitate ale variabilelor aleatoare $X_1, X_2, ..., X_n$.

Dacă funcția de structură a sistemului apare sub forma unui polinom $f(x)$ de gradul întîi în raport cu fiecare din variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$, atunci $f(X)$ este o sumă de termeni de forma:

$$K \cdot X_{i_1}, X_{i_2} ... X_{i_l}, \ (l \leqslant n).$$

Variabilele aleatoare $X_{i_1}, ..., X_{i_l}$ fiind independente, rezultă

$$E(K \cdot X_{i_1} ... X_{i_l}) = K \cdot E(X_{i_1}) \cdot E(X_{i_2}) ... E(X_{i_l}) = K \cdot p_{i_1} \cdot p_{i_2} ... p_{i_l}. \tag{29}$$

În mod analog:

$$h(p) = h(p_1, p_2, ..., p_n) \equiv f(p) = f(p_1, p_2, ..., p_n) \tag{30}$$

sau:

$$(p) = (p_1, p_2, ..., p_n).$$

Cu alte cuvinte, funcția de fiabilitate a unui sistem se obține simplu prin înlocuirea variabilelor $x_1, x_2, ..., x_n$ cu probabilitățile $p_1, p_2, ..., p_n$ în funcția de structură a sistemului sub forma simplă [1].

Exemplu. Fie sistemul cu structura din fig. 1 și funcția sa de structură:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_5 - x_1x_3x_4 - x_1x_2x_3x_5 - \\ - x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5.$$

Înlocuind variabilele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 cu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 rezultă:

$$h(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_5 - p_1p_3p_4 - p_1p_2p_3p_5 - \\ - p_1p_2p_4p_5 + p_1p_2p_3p_4p_5.$$

care este funcția de fiabilitate a sistemului cu structura din fig. 1.

Așa dar, cunoscînd funcția de structură în forma sa simplă pentru orice sistem avînd o structură dată se poate obține ușor funcția de fiabilitate a sistemului.

* * *

Cele cîteva concepte și exemple prezentate în acest articol subliniază importanța practică a cunoașterii structurii sistemelor pentru calculul fiabilității lor.

BIBLIOGRAFIE

1. KAUFMANN A., GROUCHKO D., CRUON R.: *Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes.* Masson et CIE Editeurs, Paris, 1975.
2. NELSON A. C., BATTS J. R., BEADLES R. L.: *A Computer Program for Approximating System Reliability,* IEEE Transaction on Reliability, vol. R-19, No. 2, May, 1970.
3. BARON T.: *Calitatea și fiabilitatea produselor.* Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976.

9.XII.1976

G. Goos, J. Hartmanis

DATA BASE SYSTEMS

(*Sisteme de baze de date*)

Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1976, 386 pagini

Lucrările adunate în volumul Data Base Systems au fost prezentate la cel de al 5-lea simpozion de informatică organizat între 24 și 26 septembrie 1975 de IBM—R.F.G.

Volumul este structurat ca tematică pe patru mari probleme:

— problema structurii datelor, problemă care se leagă de limbajele bazei de date;
— problema componentelor și a tehnologiei;
— probleme legate de aspectul sistemic al bazelor de date (securitatea și integritatea datelor etc.);
— probleme legate de utilizarea bazelor de date (instalare, întreținere etc.).

Parte din lucrările volumului sînt scrise în limba germană, parte în limba engleză.

Se cuvine remarcată lucrarea lui A. Survey: Data Base Research care, pe lîngă sinteza activității de cercetare în domeniul bazelor de date, oferă și o foarte bogată bibliografie.

Gedö Nicolae

GH. BOLDUR
CAMELIA RAȚIU SUCIU
M. STOICA
CARMEN HARTULARI

Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

Aspecte statice și dinamice ale problemei stabilirii ritmurilor de fabricație

Rezolvarea problemelor complexe ale programării operative a producției implică stabilirea unor ritmuri de fabricație cît mai corespunzătoare din punct de vedere economic.

Noțiunea de ritm este concepută într-un mod convențional, acceptînd ipoteza statică, conform căreia nu apar probleme de succesiune și decalare în timp, toate capacitățile de producție la un moment dat fiind presupuse disponibile.

Pe baza acestei ipoteze simplificatoare se pot rezolva la un nivel satisfăcător următoarele probleme:

— stabilirea ritmurilor de fabricație în ipoteza unui plan dat, cu resurse asigurate;

— determinarea ritmurilor de fabricație cînd se cunosc nivelurile de aprovizionare cu resurse.

Luarea în considerare a ipotezelor dinamice a condus la necesitatea adoptării tehnicilor dinamicii industriale a lui Forrester care se prezintă în ultima parte a lucrării.

Aplicațiile au fost efectuate la o întreprindere din industria construcțiilor de mașini cu profil electrotehnic. *)

1. INTRODUCERE

Programarea operativă a producției constituie una dintre preocupările centrale ale specialiștilor în conducere și organizare. Deși a fost abordată în mod științific încă de acum două decenii, totuși nu s-a ajuns încă la un consens asupra definiției programării operative a producției. Mai mult, nu s-a reușit nici cel puțin să se delimiteze în mod clar sfera de probleme pe care programarea

*) Culegerea datelor și experimentările au fost efectuate în colaborare cu ing. C. Pătrașcu, P. Francisk și T. Simion de la întreprinderea Electromagnetica.

operativă a producției trebuie să le abordeze. Există însă unele moduri de a formula problema programării operative a producției acceptate de majoritatea specialiștilor [2]. Unul dintre modurile de a pune problema surprinde aspectele *statice* ale programării operative a producției și se poate rezuma astfel: fiind date capacitățile de producție ale unei întreprinderi (secții) pe o perioadă anumită, cantitățile de produse finite solicitate de diverși beneficiari, tehnologiile de fabricație privind aceste produse, precum și informațiile necesare privind posibilitățile de aprovizionare cu materii prime și materiale, să se determine planul optim pe perioada respectivă, adică cantitățile optime de produse din fiecare sortiment. Evident că acest mod de a pune problema se bazează pe unele ipoteze aproape imposibil de realizat în practică. Astfel, se consideră că toate capacitățile de producție sînt libere la orice moment, pentru a fi utilizate la realizarea noului produs. În practică apare însă aspectul *dinamic*, datorită frecventelor suprapuneri de produse sau semifabricate ce trebuie prelucrate de aceeași capacitate de producție ceea ce are ca efect fie așteptarea (stocarea) unor repere ce urmează a fi prelucrate, după un anumit interval de timp, fie așteptarea capacităților de producție. În consecință planul „optim" care rezultă din modul static nu poate fi aproape niciodată realizat din punct de vedere practic. Totuși procedeul static poate fi util în numeroase situații, deoarece oferă informații generale asupra producției maxime pe care întreprinderea (secția) ar reuși s-o realizeze în condițiile ideale ale eliminării așteptărilor.

În cadrul problemelor de natură statică se disting în practică două situații:

1) executarea unui plan dat, considerînd că fiecare resursă poate fi asigurată;

2) executarea unui plan realizabil la nivelul resurselor efectiv disponibile.

Fundamentarea planului obținut prin metode statice poate fi realizată prin considerarea aspectelor dinamice ale problemelor programării operative a producției (eșalonarea în timp a necesarului de resurse, eșalonarea operațiilor de prelucrare în limita unui disponibil dinainte cunoscut al acestor resurse, stocarea interoperații etc.)

O metodă de verificare a soluției inițiale, obținută prin considerarea aspectelor statice, constă în aplicarea tehnicilor de dinamică industrială de tip Forrester.

2. STABILIREA RITMURILOR DE FABRICAȚIE ÎN CONDIȚIILE UNUI PLAN DAT, CU RESURSE ASIGURATE

Se consideră că planul întreprinderii este cunoscut, iar tehnologia de fabricație este bine precizată. Pe baza cantităților planificate pe un orizont de timp dat și a consumurilor specifice, se determină necesarul de resurse pe acea perioadă.

În acest caz, datorită volumului de informații foarte mare, calculul necesarului de resurse se pretează a fi efectuat cu ajutorul unui sistem de programe existent în dotarea echipamentelor electronice. Astfel, pentru sistemul IBM se folosește pachetul de programe BOMP, pentru FELIX 256 — pachetul de programe ORACLE, pentru ICL — pachetul PROMPT.

Experimentarea s-a efectuat pe calculatorul IBM/370 utilizînd fişierele BOMP [5] şi anume:

— fişierul principal de articole,
— fişierul de structuri,
— fişierul rutelor de operaţii,
— fişierul posturilor de lucru.

Planul de producţie poate fi dat pe lună, decadă, săptămînă sau pentru un interval de trei zile.

După fiecare calcul de necesar de resurse considerate pentru un orizont de timp dat se pot scrie şi calcula ecuaţiile de ritm care vor fi de forma:

$$\text{Ritm pentru o anumită resursă} = \frac{\text{Stoc subansamblu}}{\text{Fondul de timp considerat}}$$

În ecuaţiile de ritm, scrise astfel, pentru simplificare se presupune o ritmicitate şi o uniformitate perfectă.

3. STABILIREA RITMURILOR DE FABRICAŢIE ÎN CONDIŢIILE EXECUTĂRII UNUI PLAN REALIZABIL LA NIVELUL RESURSELOR EFECTIV DISPONIBILE

Aceasta este o situaţie frecvent întîlnită în practică, deoarece în timpul executării planului pot apare unele abateri între cantitatea necesară la un moment dat şi cea efectiv disponibilă. Planul de producţie iniţial se va modifica în funcţie de aceste abateri. În final, planul iniţial se va modifica, rezultînd un plan actualizat, pe care îl vom denumi *plan realizabil.* Pentru a elabora acest plan realizabil pornim de la următoarele date de intrare.

— planul de producţie propus iniţial pentru o anumită perioadă;
— stocurile de materiale, subansamble estimate pentru o anumită perioadă;
— estimarea forţei de muncă disponibilă pe locuri de muncă pe perioada luată în considerare.

Pe baza planului propus iniţial, cu ajutorul pachetului de programe BOMP se determină necesarul de materiale şi forţă de muncă corespunzător acestui plan.

În urma unor comparaţii între necesar şi disponibilul estimat, diferenţiat pe resurse, pot apărea situaţii de deficit sau excedent. Cunoscînd aceste date, factorii de decizie vor lua măsuri suplimentare de procurare a resurselor deficitare sau de redistribuire a celor excedentare. În finalul unei astfel de analize, care se face pentru un număr redus de resurse, în special resursele cheie, se poate calcula un *disponibil estimat definitiv* de resurse pentru care se va calcula *planul realizabil.*

Algoritmul de calcul pentru planul realizabil este următorul:

Pasul 1: Calculul necesarului de resurse pentru un plan dat iniţial.

Pasul 2: Compararea necesarului rezultat din calcul cu disponibilul definitiv estimat pe perioada luată în considerare.

Pasul 3: Determinarea coeficientului de ponderare.

Notînd: p_{ji} — ponderea stocului j pentru produsul i;
NEC_{ji} — necesar stoc resursă j pentru produsul i;
Q_i — cantitatea din produsul i planificată a se fabrica în perioada de plan;

rezultă:

$$p_{ji} = \frac{NEC_{ji} \cdot Q_i}{\sum\limits_i NEC_{ji} \cdot Q_i}$$

Pasul 4: Distribuirea stocurilor disponibile (mai mici decît necesarul) în funcție de un coeficient agregat de ponderare (λ_i) care ia valori reale.
Notînd: S_j — stocul existent (dat în lista întocmită de factorii de decizie)
S_{ji} — stocul din resursa j pentru produsul i

$$S_j = \sum_i S_{ji}$$

rezultă:

$$S_{ji} = \frac{NEC_{ji} \cdot Q_i \cdot \lambda_i}{\sum\limits_i NEC_{ji} \cdot Q_i} \cdot S_j.$$

Pasul 5 : Determinarea numărului (Q_i') de cadre (anumite produse finite) ce se pot executa cu stocurile existente în ordinea priorității.

$$P_1 \rightarrow min\left[Q_i, \frac{S_{1i}}{NEC_{1i}}; \frac{S_{2i}}{NEC_{2i}}; \ldots; \frac{S_{ji}}{NEC_{ji}}; \frac{F_A}{C_{iB}} \cdots\right] = Q_i'$$

în care: F_A, F_B ... reprezintă disponibilul de forță de muncă pe locuri de muncă;
C_{iA}, C_{iB} ... — timpul necesar pe un anumit loc de muncă pentru executarea subansamblelor, semifabricatelor care sînt cuprinse în produsul i.

Pasul 6: Calculul stocului rămas (S_{ji}''):

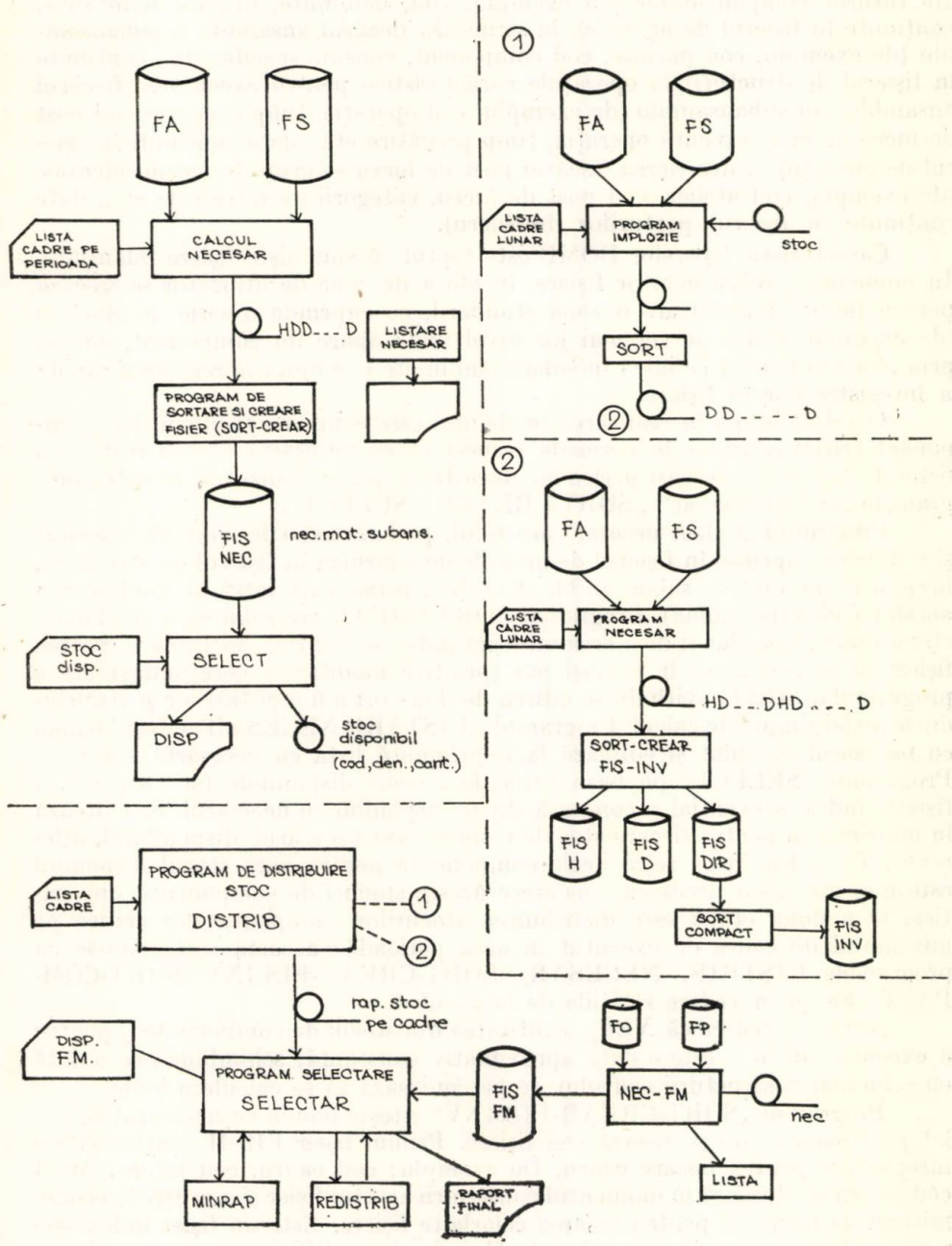
$$Q_i' \times NEC_{ji} = S_{ji}'; \; S_{ji} - S_{ji}' = S_{ji}''.$$

Pasul 7: Se redistribuie stocul S_{ji}'', după care se reia de la pasul 5.

În funcție de cantitatea de produse/săptămînă ce rezultă din aceste calcule, șeful secției va stabili ritmul de produse, semifabricate, piese pe unitatea de timp dorită (zi, schimb).

4. SISTEMUL DE PROGRAME UTILIZAT

Pentru rezolvarea practică a problemei formulate anterior este necesar un sistem de programe, care să aibă în vedere datele de intrare în model, ecuațiile modelului, forma rezultatelor dorite. Schița sistemului de programe se poate urmări în fig. 1. Ca date de intrare în sistem avem: lista de cadre subansamble ce se realizează în perioada respectivă, lista de stocuri disponibile (componente ale cadrelor) pe perioada respectivă, datele din fișierele BOMP, planul lunar.


FA
FS
LISTA CADRE PE PERIOADA
CALCUL NECESAR
HDD---D
LISTARE NECESAR
PROGRAM DE SORTARE SI CREARE FISIER (SORT-CREAR)
FIS NEC
nec.mat. subans.
STOC disp.
SELECT
DISP
stoc disponibil (cod,den.,cant.)
1
FA
FS
LISTA CADRE LUNAR
PROGRAM IMPLOZIE
Stoc
SORT
2
DD----D
2
FA
FS
LISTA CADRE LUNAR
PROGRAM NECESAR
HD--.DHD---.D
SORT-CREAR FIS-INV
FIS H
FIS D
FIS DIR
SORT COMPACT
FIS INV
LISTA CADRE
PROGRAM DE DISTRIBUIRE STOC
DISTRIB
1
2
rap. stoc pe cadre
DISP. F.M.
PROGRAM SELECTARE
SELECTAR
FIS FM
FO
FP
NEC-FM
nec
LISTA
MINRAP
REDISTRIB
RAPORT FINAL

Datele conținute în fișierele BOMP [5] se referă la: informații descriptive ale tuturor componentelor (de exemplu, cod, denumire, unitate de măsură, conținute în fișierul de articole), la structura fiecărui ansamblu și subansamblu (de exemplu, cod părinte, cod component, consum specific etc., conținute în fișierul de structuri), la operațiile caracteristice pentru executarea fiecărui ansamblu sau subansamblu (de exemplu, cod operație, timp execuție, cod post de lucru unde se execută operația, timp pregătire etc., date conținute în fișierul de operații) la descrierea fiecărui post de lucru — grup de mașini identice (de exemplu, cod atelier, cod post de lucru, categorii de retribuție etc., date conținute în fișierul posturilor de lucru).

Caracteristic fișierelor BOMP este faptul că sînt niște fișiere înlănțuite. În momentul creării acestor fișiere, în afară de zona de utilizator se creează pentru fiecare înregistrare o zonă standard, ce cuprinde o serie de cîmpuri (de exemplu, codul de cel mai jos nivel unde apare un component, adresa primului component ce intră în subansamblu etc.) ce ajută la regăsirea rapidă a înregistrărilor în fișiere.

O primă etapă în realizarea modelului este compararea stocurilor (component critic) estimate în perioada respectivă cu necesarul pentru realizarea listei de cadre din aceeași perioadă. Această etapă se realizează de către programele „Calcul necesar" „SORT-CREAR", „SELECT".

Programul „Calcul necesar" are rolul, pe baza listei de cadre de executat și a datelor cuprinse în fișierul de articole de a furniza în fișierul de structură, necesarul cumulat de subansamble și materii prime care intră în componența acestor cadre (pe bandă). Programul SORT-CREAR are rolul de a citi banda cu necesarul cumulat și de a crea un fișier index secvențial. Sortarea și crearea fișierului se realizează în același pas (printr-o modificare corespunzătoare a programului SORT) evitîndu-se citirea de două ori a înregistrărilor și reducîndu-se astfel timpul de calcul. Programul „LISTARE NECESAR" citește banda cu necesarul cumulat și editează la imprimantă lista cu necesarul cumulat. Programul „SELECT" pe baza listei de stocuri disponibile face accesul la fișierul index secvențial și compară stocul disponibil cu necesarul. Se editează la imprimantă pentru fiecare stoc de componentă necesarul, disponibilul, diferența. Pe o bandă se reține acele componente pentru care stocul disponibil este mai mic decît necesarul, deoarece aceste stocuri de componente sînt critice. O a doua etapă este distribuirea stocurilor componentelor critice pe ansamblul de cadre de executat în acea perioadă; aceasta realizîndu-se cu programele DISTRIB, NECESAR, SORT-CREAR-FIS-INV SORT-COMPACT. Se au în vedere relațiile de la pasul 4.

Avînd în vedere că NEC_{ji}, cantitatea din stocul de componentă j pentru a executa cadrul i, este o dată aproximativ constantă, schimbîndu-se o dată cu schimbarea structurii cadrului, se preconizează să se calculeze lunar.

Programul „SORT-CREAR-FIS-INV" citește banda cu necesarul cumulat pe fiecare cadru și creează trei fișiere. Primul fișier FIS-H conține cîte o înregistrare pentru fiecare cadru. De exemplu: cod cadru, cod intern. Acest cod intern se atașează în momentul construirii acestui fișier și servește la economisirea de memorie pentru crearea celorlalte fișiere. Este un fișier index secvențial, dar permite și accesul direct. Al doilea fișier FIS-D este un fișier index secvențial, cheia înregistrărilor fiind cod intern cadru — cod component și conține cantitatea cumulată din fiecare componentă pe o unitate de cadru.

Al treilea fișier FIS-DIR conține drept înregistrări perechile de coduri cod intern — cod înregistrare.

Programul „SORT-COMPACT" sortează înregistrările din fișierul FIS-DIR după cheia „cod component" și permite crearea fișierului invers FIS-INV. Acest fișier conține ca înregistrare codul unei componente și toate codurile interne ale cadrelor unde intră această componentă.

Programul DISTRIB selectează componenții NEC_{ji} și calculează stocurile de componente critice ce revin pe fiecare cadru de executat în perioada respectivă. Se citește banda cu stocurile de componente critice. Cu codul componentei critice se consultă fișierul index și se selectează în memorie codurile interne ale cadrelor în care intră componenta respectivă care se execută în perioada dată. Se consultă apoi acele înregistrări din fișierul FISD corespunzătoare codului componentei critice și codurile interne, selectîndu-se cantitățile NEC_{ji} și se calculează S_{ji} pentru toți i; rezultatele depunîndu-se pe bandă.

O a doua variantă are în vedere calculul de implozie. Ținînd seama de faptul că la implozie se explorează întreg fișierul și că numărul de cadre de executat în perioada considerată este foarte mic în raport cu numărul subansamblelor în care intră stocul de componență critică se preferă prima variantă.

A treia etapă în realizarea modelului constă în construirea rapoartelor de determinare a minimului, adică determinarea cantităților convenabile de executat pe fiecare cadru, avînd la dispoziție stocurile disponibile estimate cu coeficienții de prioritate pentru fiecare cadru, disponibilul de forță de muncă, necesarul de forță de muncă pe unitate de cadru. Realizarea acestei etape se face cu ajutorul programelor SELECTAR și NEC-FM.

Programul NEC-FM determină necesarul de forță de muncă pentru o unitate de cadru pe fiecare loc de muncă și pe întreg atelierul avînd la dispoziție banda cu necesarul cumulat pe fiecare cadru și fișierul de operații și fișierul posturilor de lucru. În fișierul FIS-M se înscrie încărcarea în fiecare atelier pentru realizarea unui cadru.

Programul, SELECTAR construiește rapoartele și calculează minimul conform relației de la pasul 5. Subrutina REDISTRIB redistribuie stocurile rămase la următorul cadru avînd în vedere relația de la pasul 6. Se editează o situație finală în care se arată ce cantitate trebuie executată din fiecare cadru.

5. STABILIREA RITMURILOR DE FABRICAȚIE CU AJUTORUL TEHNICILOR DE DINAMICĂ INDUSTRIALĂ (DE TIP FORRESTER)

Deciziile privind programarea operativă a producției, atît din punct de vedere static cît și dinamic pot fi perfecționate cu ajutorul tehnicilor de dinamică industrială. Avantajele aplicării acestor tehnici sînt:

— luarea în considerație a aspectelor dinamice ale desfășurării procesului de producție;

— posibilitatea considerării oricăror alte legături cu diverse secții ale întreprinderii și eventual cu alte întreprinderi;

— posibilitatea evidenței diverșilor factori perturbatori pe o anumită perioadă de timp (lipsă de forță de muncă, lipsă materiale, lipsă semifabricate etc.);

— verificarea strategiilor propuse şi alegerea unor strategii suboptime (privind programarea operativă a producţiei)

— analiza stabilităţii sistemului producţiei în timp etc.

Trebuie totuşi menţionat faptul că aplicarea tehnicilor Forrester prezintă şi unele dezavantaje, dintre care cele mai importante sînt:

— dificultăţi mari în stabilirea unei unităţi comune de măsură a producţiei realizate la diversele locuri de muncă sau secţii;

— probabilitatea ridicată de a comite erori inadmisibile în urma alegerii unor unităţi de măsură convenţionale;

— durata relativ mare de pregătire a datelor şi de calcul în cazul cînd se urmăreşte o analiză în unităţi naturale sau mai apropiate de cele naturale;

— necesitatea însuşirii tehnicilor de dinamică industrială de către personalul de conducere al întreprinderii.

Toate aceste dezavantaje pot fi însă înlăturate treptat, pe măsura aplicării metodei. Avantajul esenţial al aplicării tehnicilor Forrester constă în posibilitatea de a stabili evoluţia stării sistemului producţiei, toate variabilele modelului elaborat fiind funcţii de timp.

La momentul iniţial $T = 1$ (ziua întîia a perioadei de plan) se consideră că toate variabilele sînt cunoscute. Perioada de timp pentru care se poate aplica simularea cu ajutorul tehnicilor Forrester este luna de plan. S-a convenit ca intervalul de timp să fie o zi ($T = 1$ zi). A rezultat astfel că trebuie să se efectueze 25—26 cicluri de simulare, echivalentul zilelor efectiv lucrate.

Pentru a exemplifica modul de aplicare al tehnicilor de dinamică industrială s-a considerat un proces tehnologic cu un număr restrîns de locuri de muncă conform fig. 2.

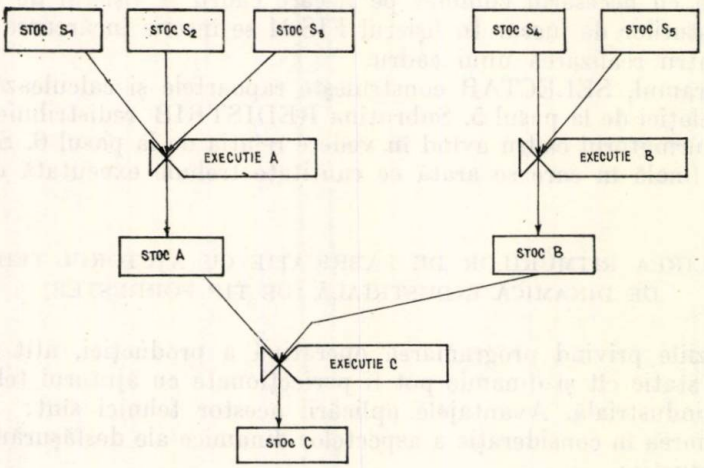


Fig. 2

Comportarea dinamică a procesului tehnologic modelat poate fi descrisă cu ajutorul unui set de ecuaţii (ecuaţii de stare ale modelului), format din ecuaţii de nivel, ecuaţii de ritm şi ecuaţii auxiliare.

A. Ecuațiile de nivel permit stabilirea stocurilor în fiecare zi. Forma generală a unei ecuații de nivel este [3], [7]:

$$S^j(t) = S^j(t-1) + \Sigma[R^I(t-1) - R^E(t-1)]\,\Delta T$$

în care ΔT reprezintă intervalul de timp la care se efectuează simularea cu ajutorul tehnicilor Forrester (1 zi);

$S^j(t-1)$ $S^j(t)$ — stocul existent la momentul $t-1$, respectiv momentul t, pentru resursa j;

$R^I(t-1)$ — ritmul intrărilor la momentul $t-1$;

$R^E(t-1)$ — ritmul ieșirilor la momentul $t-1$.

B. Ecuațiile de ritm se utilizează pentru determinarea cantităților ce se realizează în fiecare zi, în funcție de disponibilul de resurse. În general, ecuațiile de ritm sînt de forma [3], [7]:

$$S^j(t) = min\left[\min_i\left(\frac{S^{ij}(t)}{C_s^{ij} n_s^j F T_j}\right);\ \frac{FMD_j(t)}{CFM_j(t)};\ \alpha_j(t)\frac{Q_{rj}^{(t)}}{TD_{rj}^{(t)}}\right]$$

în care:

$S^{ij}(t)$ reprezintă stocul din resursa i, repartizată la locul de muncă j;

C_s^{ij} — consumul specific la locul de muncă j pentru resursa i;

FT_j — fondul de timp pe schimb la locul de muncă j;

n_s^j — numărul de schimburi la locul de muncă j;

$FMD_j(t)$ — fondul de timp disponibil la locul de muncă j;

$CFM_j(t)$ — consumul de forță de muncă la locul j, pentru a produce o unitate din semifabricatul j;

$Q_{rj}(t)$ — cantitatea rămasă de executat la momentul t, calculată cu ajutorul relației:

$Q_{rj}(t)$ — $Q_{pj}(T) - Q_{ej}(t)$

unde:

$Q_{ej}(t)$ reprezintă cantitate efectiv executată din reperul j pînă la momentul t;

$Q_{pj}^{(T)}(T)$ — cantitate planificată din reperul j pînă la momentul T (în care T este orizontul planificat, de exemplu, 26 zile lucrătoare);

$TD_{rj}^{(t)}$ — timpul disponibil rămas pentru j la momentul t;

$\alpha_j(t)$ — coeficientul dinamic.

C. *Ecuațiile auxiliare* permit generarea unor variabile aleatoare (cum este cazul forței de muncă disponibile), generarea unor traiectorii aleatoare (cum este cazul coeficientului dinamic $\alpha_j(T)$) în timp, generarea unor strategii condiționate, stabilirea valorilor funcției de eficiență economică etc.

Astfel, pentru forța de muncă disponibilă se generează o variabilă aleatoare uniformă (sau normală dacă este cazul) între două limite stabilite statistic.

În cazul coeficientului dinamic $\alpha_j(t)$ se pot stabili funcții (liniare, exponențiale etc.), iar apoi pentru fiecare caz $t = t_i$ ($i = 1, 2, .., T$) să se adauge sau să se scadă un reziduu aleator (cuprins între două limite date, de exemplu 0,01—0,3).

Un exemplu de generare a unei strategii condiționate se poate da pentru forța de muncă. Dacă minimul din ecuația de ritm se realizează pentru variabila aleatoare $FMD_j(t)$ și dacă planul nu se realizează, atunci se mărește fondul de timp disponibil pe schimb (FT_j) cu 2 ore.

* * *

Programarea operativă a producției reprezintă un complex de preocupări privind rezolvarea teoretică și în special practică a problemelor de determinare, lansare, urmărire și actualizare a planului optim de producție pe termene foarte scurte, la nivel de întreprindere, secție, echipă,cu luarea în considerare a aspectelor tehnologice, a celor privind necesarul și disponibilul de resurse, a celor ergonomice și psihosociologice.

Acesta este considerentul pentru care introducerea metodelor moderne de modelare precum și prelucrarea electronică a datelor în problema programării operative a producției trebuie să se facă treptat, abordînd pentru început aspectele statice apoi aspectele dinamice, acceptînd pentru început rezolvarea problemelor practice pe module agregate și numai într-o etapă ulterioară acceptînd abordarea analitică.

BIBLIOGRAFIE

1. BÎRLEA ȘT.: *Inițiere în cibernetica sistemelor industriale.* Editura tehnică, București, 1975.
2. BOLDUR GH.: *Asupra problemelor complexe de programare operativă a producției.* Studii și cercetări de calcul economic și cibernetică economică, nr. 4, 1973.
3. CONSTANTINESCU P., NEGOIȚĂ C. V.: *Sistemele informatice, modele ale conducerii și sistemelor conduse.* Editura tehnică, București, 1975.
4. CONWAY E., MAWWELL W., MILLER L.; *Theory of scheduling.* Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
5. DIACONESCU G., PENCEA M., ș.a.: *Codificare automată a denumirilor de materii prime și materiale în vederea implementării unei baze de date pentru gestiunea producției de materii prime și materiale.* Studii și cercetări de calcul economic și cibernetică economică, nr. 3, 1975.
6. FORRESTER J. W.: *Principles of System.* Wright — Allen Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.
7. POPPER J.: *La dynamique des systèmes. Principes et applications.* Les editions d'organisation — Paris. Eyrolles editeur. Les presses de l'Université de Québec-Montreal, 1973.
8. * * * *I.B.M. Bill of Material Processor-Application Description.*
9. * * * *I.B.M. — System Bill of Material Processor-Programmer's Manual.*

30.IX.1976.

C. HÂRTU
Catedra de cibernetică economică — A.S.E. —

Simularea unui model de creştere economică cu parametri aleatori

Problema simulării modelelor macroeconomice şi în special a celor de creştere economică, este abordată în termeni probabilistici, pornind de la ipoteza caracterului aleator al perturbaţiilor ce intervin în sistemele economice. Aceste perturbaţii cu caracter global aleator sînt simulate cu ajutorul generatoarelor de variabile aleatoare şi luate în calcul la rezolvarea modelelor dinamice folosite în activitatea de prognoză social-economică.

Lucrarea evidenţiază facilităţile oferite de simulare în rezolvarea şi analiza modelelor cibernetico-economice; modelul de simulare fiind de tip „joc", foloseşte şase parametri aleatori, ceasul simulării are o creştere constantă, generatorul de numere aleatoare este RANDU (IX, IY, YFL).

Programul de calcul este realizat în limbajul F FORTRAN şi a fost rulat pe calculatorul IBM 370 al Catedrei de cibernetică economică de la Academia de studii economice Bucureşti, în 800 de variante.

Programul P.C.R. defineşte cercetarea ştiinţifică ca una din direcţiile principale de edificare a societăţii socialiste multilateral dezvoltate şi înaintare a României spre comunism.

Potrivit sarcinilor trasate de conducerea de partid şi de stat privitoare la lărgirea preocupărilor legate de studiul variantelor de creştere economică, în cadrul Laboratoarelor Catedrei de cibernetică economică — A.S.E., au fost elaborate metode şi tehnici de simulare a modelelor de creştere economică, folosindu-se sisteme de calcul moderne, pe baza cărora se pot determina traiectorii de dezvoltare a economiei naţionale pe termen lung.

Pe linia acestor preocupări, simularea modelelor este folosită tot mai des în analiza economică, ca factor de determinare a deciziilor, fiind necesară studiului comportării în dinamică a unui sistem economic.

În cele ce urmează, se descrie un model unisectorial care a fost simulat pe calculatorul IBM 370 al Catedrei de Cibernetică Economică, folosindu-se tehnica de generare a parametrilor aleatori. Simularea este de tip „joc", urmărindu-se maximizarea unui anumit indicator (respectiv consumul extins cumulat pe tot orizontul de prognoză) pe o perioadă de 18 ani (1972—1990) în condițiile existenței mai multor parametri de comandă.

În cadrul modelului* sînt folosite următoarele simboluri:

T — orizontul de planificare ($t = 1, 2, ..., T$);
I — numărul traiectoriilor de creștere generate ($i = 1, 2, ..., I$);
FPF_t — fonduri fixe productive la sfîrșitul anului;
FPI_t — fonduri fixe productive la începutul anului;
VN_t — venit național;
E_t — eficiența fondurilor fixe productive;
PST_t — produsul social total;
K_t — ponderea cheltuielilor materiale în produsul social total;
W_t — productivitatea socială a muncii;
PO_t — populația ocupată în sfera productivă;
GD_t — gradul de dotare a muncii cu fonduri fixe productive;
FPS_t — fonduri fixe productive scoase din funcțiune;
δ_t — coeficient de casare;
P_t — populația totală;
β_t — cota din fondul de dezvoltare destinată sectorului productiv;
γ_t — rata anuală a amortizării;
α_t — rata fondului de dezvoltare;
D_t — fondul de dezvoltare;
FC_t — fondul de consum;
DP_t — fondul de dezvoltare al sectorului productiv;
DS_t — fondul de dezvoltare al stocurilor materiale;
DN_t — fondul de dezvoltare al sectorului neproductiv;
CG_t — consum extins (generalizat);
CGC_t — consum extins cumulat pe întregul orizont de prognoză;
DFP_t — partea din fondul de dezvoltare a sectorului productiv destinată creșterii fondurilor productive;
μ — coeficient de realizare a fondurilor fixe productive;
FA_t — fondul de amortizare;
IP_t — investiții brute productive;
Q — coeficient de transformare a investițiilor brute productive în fonduri fixe productive.

Cu aceste notații s-a construit următorul model** :

1. $FPI_t = FPF_{t-1}$
2. $VN_t = FPI_t \cdot E_t$
3. $PST_t = VN_t : (1 - K_t)$

*) Modelul a fost elaborat la Institutul pentru studii de planificare și prezentat în cadrul seminarului științific de prognoză social-economică organizat de Catedra de Cibernetică Economică — A.S.E.

**) Relațiile funcționale și schema de principiu a modelului se găsesc în [6]

4. $W_t = VN_t : PO_t$

5. $GD_t = FPI_t : PO_t$

6. $FPS_t = FPI_t \cdot \delta_t$

7. $D_t = VN_t \cdot \alpha_t$

8. $FC_t = VN_t \cdot (1 - \alpha_t)$

9. $DP_t = D_t \cdot \beta_t$

10. $DS_t = DP_t \cdot (1 - \mu)$

11. $DN_t = D_t \cdot (1 - \beta_t)$

12. $CG_t = FC_t + DN_t$

13. $CGC_t = CGC_t + CG_t$

14. $DFP_t = DP_t \cdot \mu$

15. $FA_t = FPI_t \cdot \gamma_t$

16. $IP_t = FA_t + DFP_t$

17. $FPF_t = FPI_t - FPS_t + Q \cdot IP_t + (1 - Q)^2 \cdot IP_{t-1} + (1 - Q)^3 \cdot IP_{t-2}$.

Modelul reuşeşte să cuprindă principalii indicatori sintetici folosiţi la nivelul economiei naţionale, indicatori ce servesc la analiza economică a întregii activităţi din sectorul producţiei materiale.

În model se disting:

— Variabilele exogene: FPF_{t-1}, IP_{t-1}, PO_t, P_t ale căror valori au fost date publicităţii fie prin intermediul anuarelor statistice, fie prin intermediul diverselor lucrări şi dări de seamă (rapoarte) prezentate de către organele centrale de conducere.

— Variabilele endogene: FPI_t, VN_t, FPS_t, D_t, FA_t, IP_t, PST_t, FPF_t, DP_t, DN_t, CG_t, DFP_t, DS_t.

— Parametrii de comandă: E_t, K_t, α_t, β_t, γ_t, δ_t;

— Constantele modelului: μ, Q.

Una din problemele importante privind simularea acestui model a constituit-o modul de estimare a parametrilor de comandă. De la început trebuie spus că, de modul în care sînt estimaţi aceşti parametri, depinde însăşi performanţa modelului.

Ipoteze de lucru

1. Principalul parametru de comandă a fost ales α_t — rata fondului de dezvoltare — fiind generat aleator, domeniul în care i se atribuie valori fiind stabilit pe baza unor considerente de politică economică.

Au fost considerate două variante de lucru:

a) Varianta regresivă liniară, în care α_t are o tendinţă descendentă (fig. 1); $0{,}28 \leqslant \alpha_t \leqslant 0{,}34$.

b) Varianta parabolică (fig. 2); $0{,}26 \leqslant \alpha_t \leqslant 0{,}35$.

Teoretic se poate lucra cu orice valori ale lui α_t cuprinse în [0,1].

2. Cu privire la E_t, am considerat că el trebuie să aibă o ușoară tendință crescătoare, ținînd seama de faptul că prin măsurile ce se iau în fiecare

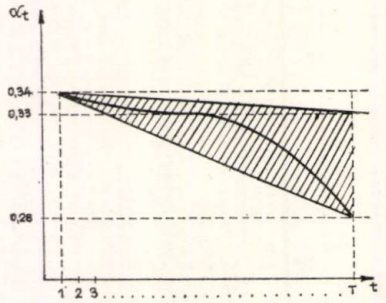


Fig. 1

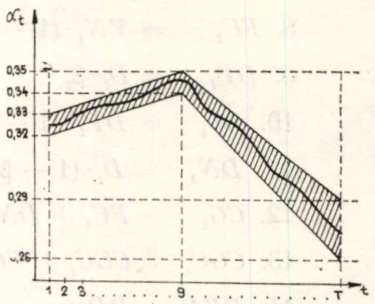


Fig. 2

unitate productivă se caută folosirea maximă a capacității de lucru a fiecărui utilaj.

Ecuația de evoluție a acestui parametru este:

$$E_t = (7{,}214 - 0{,}014t)/17, \quad (t = 1, 2, ..., 18).$$

Această tendință de creștere a eficienței fondurilor fixe productive, compensează într-o oarecare măsură descreșterea lui α_t în varianta regresivă liniară.

3. Ponderea cheltuielilor materiale în produsul social total K_t, are o tendință de scădere, de la 0,59 în 1972 la 0,50 în 1990, în ideia obținerii unei valori mai mari a producției cu cheltuieli materiale mai mici, adică:

$$K_t = (10{,}229 - 0{,}090t)/17.$$

4. Ipoteza de evoluție liniară este valabilă și pentru ceilalți parametri de comandă — β_t, γ_t, δ_t — avînd în vedere două aspecte:

— nu s-au făcut studii separate de prognoză pentru acești indicatori;

— ne interesează tendința acestora și mai puțin precizia.

Ecuațiile de evoluție pentru acești parametrii sînt:

$$\beta_t = (12{,}1 - 0{,}1t)/17$$

β_t scade de la 0,7 la 0,6 în 1990 datorită în principal, tendinței de creștere a ponderii serviciilor în produsul social total.

$$\gamma_t = (0{,}809 + 0{,}029t)/17$$

γ_t are o tendință de creștere datorită progresului tehnic deosebit de rapid.

$$\delta_t = (0{,}3 + 0{,}02t)/17$$

δ_t are și el o tendință de creștere deoarece uzura morală a fondurilor fixe productive devine tot mai pronunțată.

5. Constantele modelului sînt μ și Q, ale căror valori au fost determinate din studii statistice.

Schema logică de calcul pentru soluționarea modelului este prezentată în figura 3.

Tabelul 1

An	Populația (mil.)	Populația ocupată (mil.)	E_t (%)	γ_t (%)	β_z (%)	δ_t (%)
1	20,722	7,800	42,6	5,10	80,0	4,0
2	20,944	7,988	42,7	5,27	79,4	4,2
3	21,167	8,176	42,8	5,44	78,8	4,3
4	21,389	8,365	42,8	5,61	78,2	4,5
5	21,611	8,553	42,9	5,78	77,6	4,6
6	21,833	8,741	43,0	5,95	77,1	4,7
7	22,056	8,929	43,1	6,12	76,5	4,9
8	22,278	9,118	43,2	6,29	75,8	5,1
9	22,500	9,306	43,3	6,46	75,3	5,2
10	22,722	9,494	43,3	6,63	74,7	5,4
11	22,944	9,682	43,4	6,80	74,1	5,5
12	23,167	9,871	43,5	6,97	73,5	5,7
13	23,389	10,059	43,6	7,15	72,9	5,8
14	23,611	10,247	43,7	7,32	72,3	5,9
15	23,833	10,435	43,8	7,48	71,7	6,1
16	24,056	10,624	43,8	7,66	71,2	6.3
17	24,278	10,812	43,9	7,83	70,5	6,5
18	24,500	11,000	44,0	8,00	70,0	6,6

Conform acestor ipoteze s-au obținut rezultatele prezentate în tabelul 1.

Ceasul simulării are o creștere constantă, iar numărul traiectoriilor generate este $I = 800$.

Pentru varianta [a] cel mai bun șir α_t, din punctul de vedere al maximizării consumului extins, cumulat pe tot orizontul de prognoză, este:

An	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α_t(%)	34,0	33,83	33,3	33,03	33,18	32,91	33,09	33,04	32,74

10	11	12	13	14	15	16	17	18
32,39	32,7	30,19	31,55	31,01	30,55	28,79	28,61	28,80

Corespunzător acestui şir, s-au obţinut următoarele valori ale fondului de consum:

An	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fond de consum (miliarde lei)	171,5	185,8	203,5	221,9	240,9	261,7	283,1	307,2	334,5

10	11	12	13	14	15	16	17	18
364,3	392,5	440,9	466,5	507,9	551,7	610,1	657,8	705,2

Reiese că fondul de consum va fi de 4,1 ori mai mare în 1990 decît în 1973, ceea ce se va reflecta în mod pozitiv asupra consumului per capita, acesta ajungînd în 1990 la 28.800 lei, adică de 3,5 ori mai mare decît în anul de bază.

Diferenţa dintre consumul extins cumulat al variantei cu cel mai bun α_t şi cel al variantei cu cel mai slab α_t (din punctul de vedere al criteriului ales) este de 68, 345 miliarde lei, această diferenţă apreciabilă obţinîndu-se exclusiv pe seama jocului şirurilor α_t, generate între limite fixate apriori.

Rezultă că variaţii mici ale parametrului de comandă α_t se repercutează asupra sistemului economic cu efecte "economice" sau „non economice" în funcţie de distribuţia valorilor sale.

Pentru varianta [**b**], cel mai bun şir α_t, este:

An	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t(%)	32,53	32,53	33,41	33,67	33,31	33,87	34,4	34,56	34,8

10	11	12	13	14	15	16	17	18
33,66	33,13	32,66	30,93	29,63	29,06	27,78	28,57	26,63

iar fondul de consum corespunzător este:

An	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fond de consum (miliarde lei)	175,3	187,2	198,3	212,3	229,3	244,1	260,0	278,5	298,1

10	11	12	13	14	15	16	17	18
325,8	351,9	379,2	415,5	450,8	482,5	520,5	544,2	591,0

Consumul extins cumulat pentru această variantă este de 6865,848 miliarde lei repartizat astfel:

An	1	2	3	4	5	6	7	8
CG_t	192,2	205,8	219,4	235,7	254,9	272,7	292,0	314,0

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
337,4	367,6	397,1	427,8	465,8	503,3	538,3	578,3	608,2	655,3

Consumul extins cumulat pentru varianta [**a**] este de 7235,894 miliarde lei.

Făcînd o analiză comparativă a rezultatelor obținute în cele două variante de evoluție ale parametrului de comandă α_t, pentru cele mai bune traiectorii de creștere economică, se observă că valoarea funcției obiectiv este aproape aceeași, diferă doar distribuția consumului extins în fiecare an. Aceste diferențe sînt totuși mici, după cum reiese din tabelul 2.

Tabelul 2

An	Varianta [**a**]			Varianta [**b**]		
	α_t(%)	Fond de consum	Consum extins	α_t(%)	Fond de consum	Consum extins
1	34,0	171,5	198,013	32,53	175,3	192,230
2	33,83	185,8	214,822	32,53	187,2	205,763
3	33,30	203,5	235,172	33,41	198,3	219,413
4	33,03	221,3	256,646	33,67	212,3	235,699
5	33,18	240,3	278,848	33,31	229,3	254,869
6	32,91	261,7	303,990	33,87	244,1	272,734
7	33,09	283,1	329,987	34,40	260,0	292,034
8	33,04	307,2	358,856	34,56	278,5	314,024
9	32,74	334,5	390,962	34,80	298,1	337,405
10	32,39	364,3	425,851	33,66	325,8	367,583
11	32,70	392,5	460,988	33,13	352,0	397,061
12	30,19	440,9	510,413	32,66	379,2	427,844
13	31,55	466,5	546,193	30,93	415,5	465,850
14	31,01	507,9	593,779	29,63	450,8	503,291
15	30,55	551,7	644,539	29,06	482,5	538,307
16	28,79	610,1	705,854	27,78	520,5	578,252
17	28,61	657,9	761,832	28,57	544,2	608,192
18	28,80	705,2	819,339	26,63	591,0	655,307
TOTAL:		6905,5	7235,894		6144,6	6865,848

Rezultă că valoarea consumului extins cumulat al variantei [**a**] este cu 370,046 miliarde lei mai mare decît în cazul variantei [**b**];

Conform celor două variante [**a**] și [**b**] s-au obținut traiectoriile de creștere economică prezentate în figura 4 și soluțiile din tabelele 3 și 4.

AN DE BAZĂ 1972 MILIARDE LEI

An	Fonduri fixe productive la 1 ian.	Produs social total	Venit național	Fond de dezvoltare	Dezvolt. sect. productiv	Creștere fd. fix prod.	Creștere stocuri
1	610.000	635.573	259.860	88.352	61.847	49.477	12.369
2	657.756	677.840	280.745	94.974	65.923	52.739	13.185
3	713.438	727.344	305.099	101.604	69.928	55.942	13.986
4	773.279	780.024	331.327	109.445	74.680	59.744	14.936
5	837.503	836.013	359.535	119.276	80.687	64.549	16.137
6	906.943	896.036	396.036	128.397	86.101	68.881	17.220
7	981.615	959.992	423.018	139.958	93.031	74.425	18.606
8	1062.399	1028.624	458.706	151.557	99.849	79.880	19.970
9	1142.545	1102.040	497.280	162.829	106.318	85.054	21.264
10	1243.106	1180.157	538.776	174.521	112.925	90.340	22.585
11	1343.285	1263.040	583.302	190.764	122.313	97.851	24.463
12	1451.655	1352.025	631.555	190.686	121.141	96.913	24.288
13	1563.506	1442.606	681.504	214.981	135.311	108.249	27.062
14	1685.550	1540.884	736.089	228.234	142.310	113.848	28.462
15	1815.745	1644.806	794.441	242.699	149.902	119.922	29.980
16	1954.477	1754.579	856.750	246.658	150.897	120.717	30.179
17	2098.488	1867.156	921.606	263.704	159.774	127.819	31.955
18	2251.194	1985.488	990.525	285.310	171.186	136.949	34.237

An	1	2	3	4	5	6	7	8	9
GD	78	82	87	92	98	104	110	117	124
K(%)	59,1	58,6	58,1	57,5	57,0	56,5	55,9	55,4	54,9
W	33	35	37	40	42	45	47	50	53

Tabelul 3

VARIANTA [a]

AN DE BAZĂ 1972

MILIARDE LEI

An	Dezvolt. sector neprod.	Fond consum	Fond amortizare	Investiții productive	Fonduri de producție casate	Consum generalizat	Rata fond de dezvoltare %
1	26.506	171.508	31.110	80.587	12.200	198.013	34,00
2	29.051	185.771	34.668	87.406	13.929	214.822	33.83
3	31.677	203.495	38.819	94.762	15.947	235.172	33.33
4	34.675	221.881	43.395	103.139	18.195	256.646	33.03
5	38.589	240.259	48.427	112.977	20.691	278.848	33,18
6	42.295	261.695	53.990	122.871	23.474	303.990	32,91
7	46.927	283.060	60.109	134.534	26.561	329.987	33,09
8	51.708	307.149	66.869	146.748	29.997	358.856	33,04
9	56.511	334.450	74.315	159.369	33.810	390.962	33,74
10	61.596	364,255	82.484	172.824	38.024	425.851	32,39
11	68.451	392.538	91.422	189.273	42.669	460.988	32,70
12	69.544	440.869	101.274	198.187	47.819	510.413	30,19
13	79.699	466.523	111.745	219.994	53.343	546,193	31,55
14	85.923	507.856	183.343	237.191	59.490	593.779	31,01
15	92.797	551.742	135.968	255.889	66.221	644.539	30,55
16	95.761	610.093	149.690	270.407	73.580	705.854	28,79
17	103.930	657.902	164.299	292.118	81.471	761.832	28,61
18	114.124	705.215	180.095	317.044	90.048	819.339	28,80

MII LEI

AN	10	11	12	13	14	15	16	17	18
GD	131	139	147	155	164	174	184	194	205
K%	54,3	53,8	53,3	52,8	52,2	51,7	51,2	50,6	50,1
W	57	60	64	68	72	76	81	85	90

AN DE BAZĂ 1972

An	Fonduri fixe productive la 1 ian.	Produs social total	Venit național	Fond de dezvoltare	Dezv. sector productiv	Creștere fonduri fixe productive	Creștere stocuri
1	610.000	63 .537	259.860	84.537	67.629	54.104	13.526
2	650.009	669.856	277.439	90.258	71.676	57.340	14.335
3	696.492	710.068	297.853	99.513	78.440	62.752	15.688
4	746.801	753.316	319.982	107.730	84.283	67.426	16.857
5	800.844	799.418	343.797	114.529	88.928	71.143	17.786
6	858.031	847.712	369.054	124.995	96.320	77.056	19.264
7	919.542	899.287	396.268	136.306	104.234	83.387	20.847
8	985.871	954.530	425.664	147.123	111.640	89.312	22.328
9	1.056.920	1.013.243	457.211	159.118	119.807	95.845	23.961
10	1.133.009	1.075.635	491.059	165.284	123.477	98.781	24.695
11	1.211.944	1.139.545	526.269	174.327	129.207	103.366	25.841
12	1.294.268	1.205.440	563.083	183.924	135.238	108.190	27.048
13	1.380.148	1.273.427	601.582	186.084	135.732	108.585	27.14
14	1.466.927	1.341.024	640.615	189.798	137.324	109.859	27.465
15	1.554.538	1.408.190	680.156	197.659	141.849	113.479	28.370
16	1.644.311	1.476.136	720.789	200.258	142.537	114.029	29.507
17	1.734.679	1.543.453	761.830	217.654	153.638	122.910	30.728
18	1.830.495	1.614.444	805.418	214.443	150.110	120.088	30.022

AN	1	2	3	4	5	6	7	8	9
GD	78,42	81,69	85,62	89,84	94,33	98,99	103,95	109,26	114,87
K(%)	0,59	0,59	0,58	0,58	0,57	0,56	0,56	0,55	0,55
W	33,405	34,868	36,615	38,494	40,493	42,577	44,798	47,173	49,690

Tabelul 4

VARIANTA [b]

MILIARDE LEI

An	Dezv. sector neproductiv	Fond consum	Fond amortizare	Investiții productive	Fond de prod. casate	Consum generalizat	Rata fond de dezvolt. %
1	16.907	175.323	31.110	85.214	24.400	192.230	32,531
2	18.583	187.181	34.259	91.600	26.994	205.763	32,531
3	21.073	198,340	37.897	100,649	29.990	219.413	32,41
4	23.447	212.252	41.909	109.335	33.299	235.699	33,67
5	25.601	229.268	46.308	117,450	36.933	254.869	33,31
6	28.675	244.959	51.078	128.134	40.883	272.734	33,87
7	32.072	259.962	56.308	139.696	45.220	292.034	34,40
8	35.483	278.541	62.052	151.364	49.989	314.024	34,56
9	39,312	298.093	68.327	164.172	55.209	337.405	34,80
10	41.807	325.776	75,178	173.960	60.916	367.583	33,66
11	45.120	351.941	82.483	185.849	67.013	397.061	33,13
12	48.686	379.159	90.294	198.485	73.545	427.844	32,66
13	50.352	415.498	98.640	207.225	80.536	465.850	30,93
14	52.473	450.817	107.344	217.204	87.843	503.291	29,63
15	55.809	482.497	116.407	229.887	95.467	538.307	29,06
16	57.721	520.530	125.935	239.964	103.495	578.252	27,78
17	64.016	544.176	135.816	258.725	111.836	608.192	28,57
18	64,333	590,975	146,440	266.528	120.813	655.307	26,63

MII LEI

AN	10	11	12	13	14	15	16	17	18
GD	20,80	126,81	132,95	139,23	145,38	151,40	157,41	163,29	169,47
K(%)	0,54	0,54	0,53	0,52	0,52	0,52	0,51	0,51	0,50
W	2,357	55,067	57,843	60,690	63,489	66,241	69,003	71,712	74,567

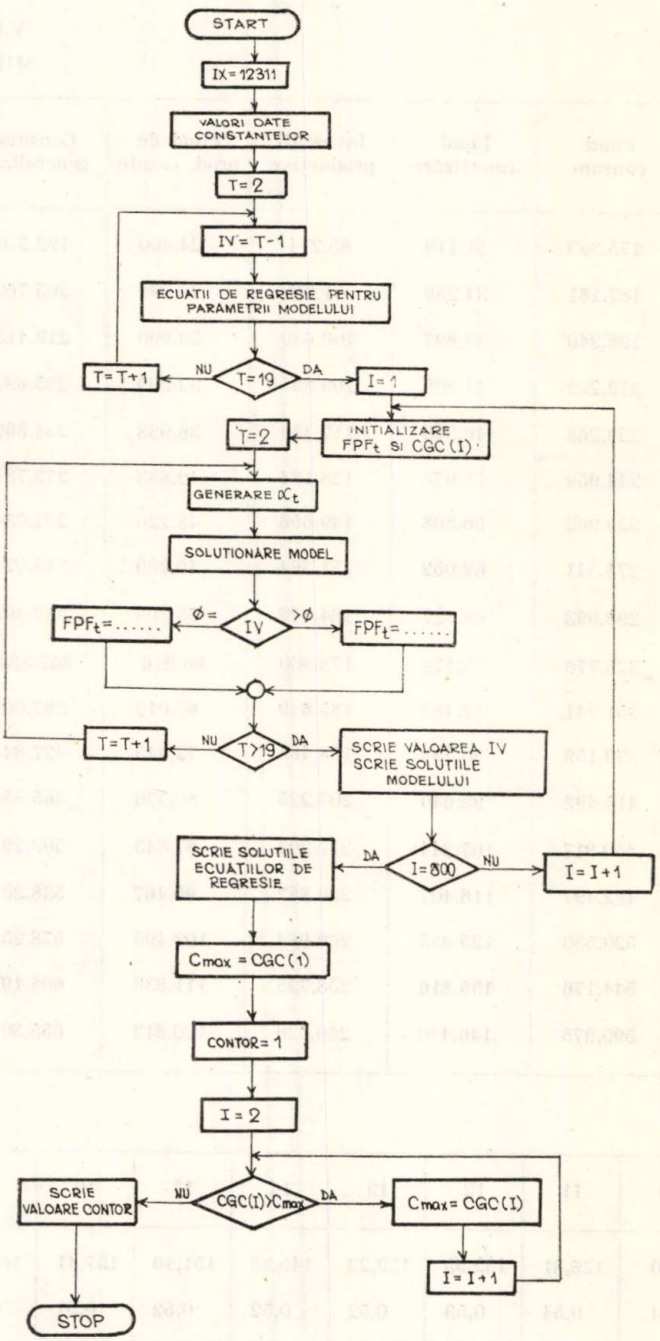

START
IX=12311
VALORI DATE CONSTANTELOR
T=2
IV=T-1
ECUATII DE REGRESIE PENTRU PARAMETRII MODELULUI
T=T+1
NU
T=19
DA
I=1
T=2
INITIALIZARE FPF$_t$ SI CGC(I)
GENERARE α_t
SOLUTIONARE MODEL
FPF$_t$=.....
Ø=
IV
>Ø
FPF$_t$=.....
T=T+1
NU
T>19
DA
SCRIE VALOAREA IV
SCRIE SOLUTIILE MODELULUI
SCRIE SOLUTIILE ECUATIILOR DE REGRESIE
DA
I=800
NU
I=I+1
Cmax = CGC(1)
CONTOR=1
I=2
SCRIE VALOARE CONTOR
NU
CGC(I)>Cmax
DA
Cmax=CGC(I)
I=I+1
STOP

Fig. 3

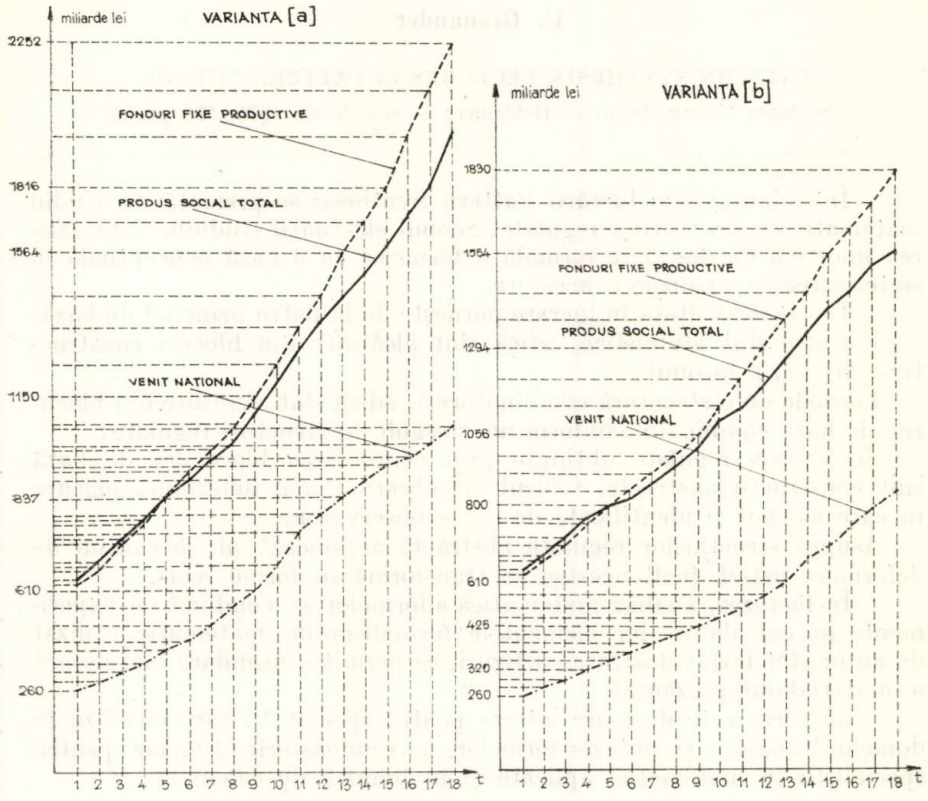


Fig. 4

Avantajele folosirii metodelor de simulare pentru obținerea soluțiilor modelelor de creștere economică, sînt evidente, atît din punct de vedere al timpului de calcul, cît și al costurilor aferente prelucrării datelor cu care operează modelul.

Pentru ilustrare, menționăm că s-au elaborat 800 traiectorii pentru fiecare variantă în parte, timpul necesar obținerii acestor traiectorii fiind de 2h 50'. În plus, rapiditatea obținerii rezultatelor duce la creșterea considerabilă a operativității în munca de cercetare a fenomenului studiat.

BIBLIOGRAFIE

1. MANEA MĂNESCU: *Prognoza dezvoltării economice și sociale a României Socialiste.* Viitorul social, nr. 1, 1972.
2. DOBRESCU E.: *Corelația dintre acumulare și consum.* Editura politică, București, 1971.
3. DOBRESCU E.: *Ritmul creșterii economice.* Editura politică, București, 1968.
4. NAYLOR T.: *Computer Simulation Techniques.* Prentice Hall, Londra, 1969.
5. SMITH J.: *Computer Simulation Models.* Prentice Hall, Londra, 1968.
6. DESMIREANU I., TOPALĂ E., ș.a.: *Model macroeconomic unisectorial pentru dezvoltarea economiei naționale,* Revista de statistică, nr. 3, 1974.
8. DOOLEY R., GARRAN Mc.: *Operations Planning and Control,* New York, John Wiley, 1964.
9. * * * *Teorii și modele ale creșterii economice în socialism.* Editura Academiei R.S.R., București, 1970.

2.X.1976

U. Grenander

PATTERN SYNTHESIS. LECTURES IN PATTERN THEORY
Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1976, 509 pagini

În volumul I al lucrării Pattern Synthesis se prezintă un studiu matematic al structurilor regulate. Scopul efectuării studiului este găsirea unor căi de descriere formală a formelor ca o bază conceptuală în sintetizarea și analizarea acestora.

Teoria dezvoltată în lucrare pornește de la patru principii de bază:
— Formele sînt atomistice, adică sînt alcătuite din blocuri constructive de bază (atomi);
— Formele au o structură combinatorică, adică sînt alcătuite din blocurile de bază combinate, conform unor reguli, în structuri regulate;
— Structurile regulate obținute prin combinarea blocurilor de bază sînt construcții abstracte. Cadrul lor observațional determină măsura în care ele pot fi identificate de către observator;
— Asupra structurilor regulate abstracte acționează un mecanism de deformare astfel, încît acestea se transformă în forme reale.

În lucrarea, analiza matematică a formelor se combină cu experimente pe calculator, iar elementele formalismului matematic utilizat de autor sînt bogat ilustrate cu figuri, ce permit o asimilare mai ușoară a materialului prezentat.

Lucrarea este de mare interes pentru specialiștii care lucrează în domeniul analizei și sintezei formelor, a recunoașterii formelor, pentru specialiștii în matematici aplicate și în tehnică de calcul.

Gedö Niculae

I. VĂDUVA
V. FLORESCU
Academia de studii economice
V. BALTAC
I. FLORICICĂ
Institutul pentru tehnică de calcul

Raţionalizarea activităţii de programare

Preocupaţi de conceperea unei metodologii unitare şi ştiinţifice care să fundamenteze întreaga activitate de studiere, organizare, codificare, testare şi menţinere a programelor, autorii, îmbinînd programarea deductivă (programarea de sus în jos) cu structurile Dijkstra arată cum se poate defini în mod unitar, clar şi complet orice problemă de prelucrare automată a datelor.

O atenţie deosebită se acordă modului de organizare a activităţii de programare conform principiilor metodei cunoscută sub numele de „echipa programatorului şef".

Prezentarea materialului este însoţită de exemple edificatoare.

Prin problematica lui, materialul deschide o cale către studiul raportului dintre forma algebrică şi cea algoritmică de definire a unei probleme.

A. PROGRAMAREA STRUCTURATĂ

Introducere

Sarcinile deosebite ce decurg din documentele Congresului al XI-lea al P.C.R. pentru introducerea sistemelor de prelucrare automată a datelor la diferite niveluri ale economiei naţionale fac deosebit de utile preocupările pe linia îmbunătăţirii metodologiei de concepere şi realizare a sistemelor informatice, de raţionalizare a diferitelor activităţi pe care le implică procesul de de proiectare şi introducere a acestora.

Programarea, activitate cu o pondere destul de ridicată în procesul de concepere şi realizare a sistemelor informatice a scăpat deseori rigorilor ştiinţei şi metodologiei, rămînînd tributară experienţei şi intuiţiei fiecărui programator.

Practica arată că, de cele mai multe ori N programatori asociază aceloraşi probleme N programe diferite. În plus, cîţi dintre ei nu pierd timp preţios

în căutarea unor erori de execuție generate deseori de IF-uri incluse, combinate cu GOTO-uri, sau de numărul mare de instrucțiuni ale unui modul de program care face dificilă urmărirea realizării, execuției și menținerii lui.

Testarea programelor, considerată ca o cale de demonstrare a validității, constituie doar o metodă de evidențiere a unor anumite tipuri de erori comise eventual în program dar nu și de demonstrare a absenței acestora [5].

În scopul realizării unui suport metodologic științific, unitar, coerent și ne-ambigu, care să stea la baza conceperii, organizării, codificării și testării programelor, cercetările din ultimii ani s-au îndreptat către cristalizarea unor concepte, formularea unor reguli, definirea unei metodologii științifice, avînd ca finalitate programarea structurată.

Definim în extenso programarea structurată ca fiind o metodă de concepere, organizare, codificare, testare și menținere a programelor. Necesitatea ei este motivată de:

a) creșterea costului părții software, ajungînd pînă la 50—60% din costul elaborării unui nou sistem de calcul, prognozele arătînd procente de 90% înainte de sfîrșitul acestui secol;

b) îmbunătățirea calității părții software prin elaborarea unui cod ușor de citit, reducerea fazei de depanare și facilitarea documentării programelor. Dijkstra [1] menționează: „Calitatea unui program este o funcție descrescătoare de densitatea instrucțiunii GOTO";

c) punerea la dispoziția programatorului a unor structuri standard pentru codificarea rapidă a algoritmilor;

d) facilitățile în procesul de comunicare a programelor. Programul, scris într-un limbaj oarecare, apare ca un mijloc de comunicare cu mașina. Acesta rezolvă numai o parte din problemă, comunicarea cu ceilalți programatori fiind la fel de importantă;

e) dovedirea validității programelor. Prin introducerea mai multor nivele în construcția programului și împărțirea lui în module se dă posibilitatea unei mai ușoare testări a corectitudinii programului, considerîndu-se fiecare parte separat, independentă de celelalte;

f) textul programului să reflecte pe cît posibil evoluția dinamică a execuției lui. Prin folosirea redusă sau chiar eliminarea instrucțiunii GOTO, un program structurat tinde să devină liniar (șir de module) construcția cea mai simplă fiind de forma din figura 1.

Execuția unui modul este determinată de aserțiunile de intrare/ieșire ce-i sînt asociate.

Programarea structurată apare ca o dezvoltare a programării modulare, tehnică deja utilizată cu mai mulți ani în urmă și care are la bază descom-

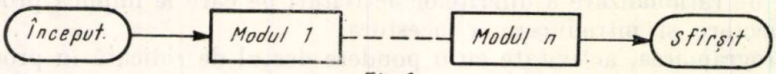


Fig. 1

punerea unui program în elemente logice numite module; fiecare modul are o funcție bine definită în cadrul programului. Amintim cîteva din elementele specifice programării modulare.

Conform acestei metode de programare, rezolvarea unei probleme complexe se realizează prin descompunerea ei în elemente logice simple şi independente (module de prelucrare) asamblate dinamic de către un element principal (modul director) în funcţie de cazurile de prelucrare.

Un modul de prelucrare poate fi activat de unul sau mai multe module de nivel ierarhic superior (fig. 2).

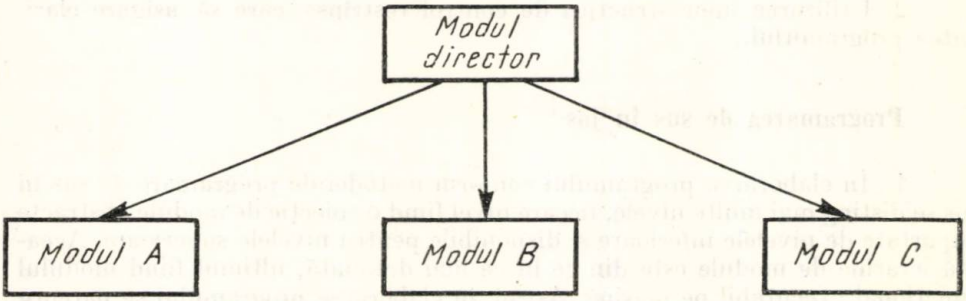


Fig. 2

Fiecare modul trebuie să aibă, aşa cum arată Mills [8] o singură intrare şi o singură ieşire.

Printre avantajele modularizării programelor citäm:

a) Scrierea, compilarea şi testarea programelor poate fi făcută pe părţi (module), ceea ce uşurează realizarea şi actualizarea lui;

b) Structura modulară este independentă de limbajul de programare utilizat. Modulele pot fi scrise în limbaje diferite, iar apoi compilate şi asamblate.

c) Modificarea programului se face la nivel de modul, fără a urmări logica întregului program.

d) Extinderea programului prin adăugarea de noi module devine foarte simplă.

e) Scrierea programului poate să fie dată în sarcina mai multor persoane (fiecare persoană cunoscînd variabilele de intrare şi ieşire, precum şi funcţia modulului ce-i este dat spre realizare):

$R \leftarrow MP(P)$ unde R reprezintă rezultatul prelucrării (ieşirile);
P parametrii de activare (intrările).

f) Fiecare modul executabil, constituind un mod de rezolvare al unei funcţii de prelucrare, poate întregii o bibliotecă cu funcţii executabile care, după părerea noastră, va constitui scheletul viitoarelor sisteme informatice.

Un alt aspect al programării, mult discutat în ultimul timp de către adepţii programării structurate, este eliminarea instrucţiunii GOTO din setul de instrucţiuni al limbajelor de înalt nivel.

De la articolul lui Dijkstra [1] din 1968, discuţiile în acest sens sînt contradictorii (vezi Knuth) [2]. Toţi autorii sînt însă de acord că înlocuirea instrucţiunii GOTO cu alte instrucţiuni de control, sau folosirea ei judicioasă sporeşte substanţial claritatea programului, precum şi timpul de testare, execuţie şi menţinere a lui.

În [14] R. Amstrong prezintă soluții de utilizare rațională a instrucțiunii GOTO pentru a asigura modularizarea programării utilizînd limbajul evoluat COBOL.

Principiile de bază ale programării structurate sînt:

1. Programarea de sus în jos (top down programming), care are la bază conceptul descompunerii, pe nivele, a unei probleme complexe într-un ansamblu de probleme simple.

2. Utilizarea unor structuri de control restrînse care să asigure claritatea programului.

Programarea de sus în jos

1. În elaborarea programului conform metodei de programare de sus în jos se disting mai multe nivele, fiecare nivel fiind o colecție de module abstracte suportate de nivelele inferioare și disponibile pentru nivelele superioare. Această ierarhie de module este din ce în ce mai detaliată, ultimul fiind modulul funcțional executabil pe mașină. Astfel, în elaborarea programului se parcurg mai multe faze și anume:

a) Se descrie activitatea în termeni generali (fig. 3);

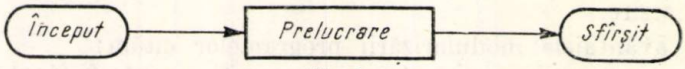


Fig. 3

(de exemplu, „calculul utilizării capacității de producție la întreprinderea X").

b) Se face apoi o descriere mai în detaliu, în termeni mai puțin generali, descompunîndu-se problema în subprobleme (figura 4).

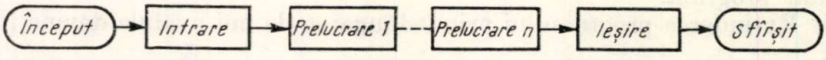


Fig. 4

c) Se continuă aplicarea lui b) pentru fiecare bloc (modul) în parte, repetîndu-se acest proces pînă se atinge nivelul operațiunilor elementare, (instrucțiuni ale limbajului de programare: „adună A cu B, înmulțește cu C" etc.) (figura 5).

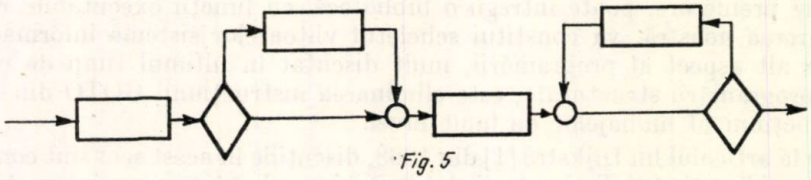


Fig. 5

Procesul de programare de sus în jos poate fi bine ilustrat printr-un nou formalism, cunoscut în literatura de specialitate sub numele de arbore de programare [3]. Dacă dorim să reprezentăm activitatea de concepere a unui

program, precum şi structura lui, cu ajutorul organigramei clasice nu am ajunge la nici un rezultat, pentru că organigrama nu reprezintă decît prelucrarea din interiorul programului şi ordinea internă de execuţie a instrucţiunilor în calculator.

Arborele de programare reflectă nu numai prelucrarea, dar şi conceperea şi structura programului. Forma lui generală este dată în figura 6.

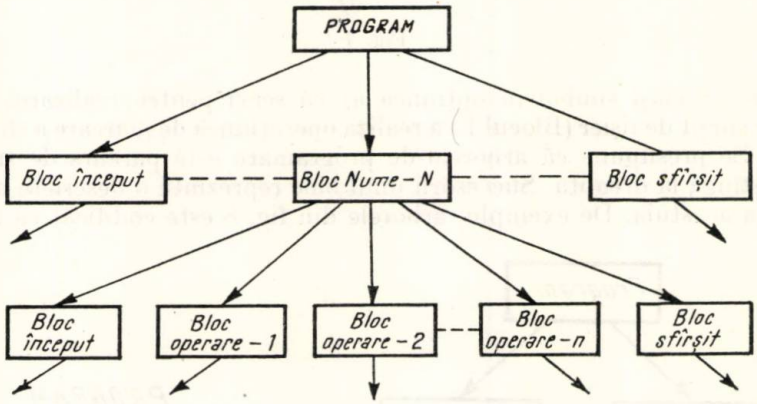


Fig. 6

Convenţii privind reprezentarea arborelui de programare

a) În reprezentarea arborelui de programare vom folosi următoarele simboluri;

1. [x] reprezintă tratamentul X, care la codificarea programului apare ca un grup de instrucţiuni ce se execută secvenţial (la limită poate fi o singură instrucţiune). Îl vom numi bloc.

2. (c) : apare înaintea unui tratament repetitiv, indicînd numărul de repetări al blocului ce urmează sau condiţia de repetare (figura 7a).

a)

Fig. 7

3. ◇ : conţine condiţia de execuţie a unui bloc, corespunzînd unei instrucţiuni de decizie logică. Poate avea o singură ramură (IF p THEN bloc 1), două ramuri (IF p THEN bloc 1 ELSE bloc 2) sau mai multe ramuri (corespunzînd instrucţiunii CASE) (figura 7b).

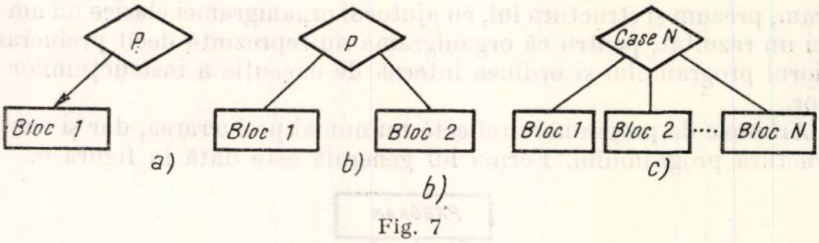


Fig. 7

Observație. Același simbol în opțiunea a) va servi pentru realizarea selecției în caz de sfîrșit de fișier (Blocul 1 va realiza operațiunea de marcare a sfîrșitului).

b) Se presupune că arborele de programare este parcurs de sus în jos și de la stînga la dreapta. Succesorii unui bloc reprezintă o descriere mai amănunțită a acestuia. De exemplu, arborele din fig. 8 este codificat ca în fig. 9:

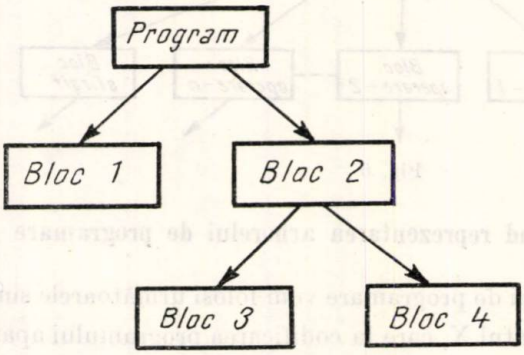


Fig. 8

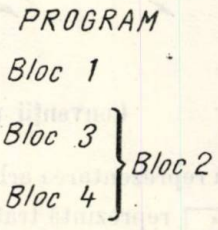


Fig. 9

Exemplu.

Se pune problema constituirii unui dicționar bilingv și consultarea lui. Datele sînt alcătuite dintr-o valoare întreagă N și N cupluri de cuvinte (un cuvînt și traducerea lui) într-o ordine oarecare. Se dau apoi pentru consultare un număr de M cuvinte, fiecare cuvînt fiind însoțit de un reper (valoarea 1 sau 2) precizînd în ce limbă este. Se va imprima fiecare cuvînt însoțit de traducerea lui.

Descompunerea problemei date în probleme mai simple și rezolvarea în parte a fiecăreia se prezintă prin arborele de programare din fig. 10.

Pentru scrierea programului într-un limbaj evoluat rezultă declararea următoarelor variabile și tabele:

— DICT 1: pentru conservarea datelor în limbaj L 1 și traducerilor în L2 (nivel 5 „stochează în DICT1") și respectiv DICT2.

— N pentru dimensionarea tabelelor precedente (nivel 3, „citește N")

— M ca număr al cuvintelor de tradus (nivel 2, „citește M").

— o variabilă de tip caracter, DATA (nivel 3 „citește cuvîntul"), un întreg, REPER (nivel 3 „citește reperul") și o variabilă TRAD pentru traducerea DATEI (nivel 4 „imprimă traducerea...").

— o variabilă I pentru realizarea proceselor iterative.

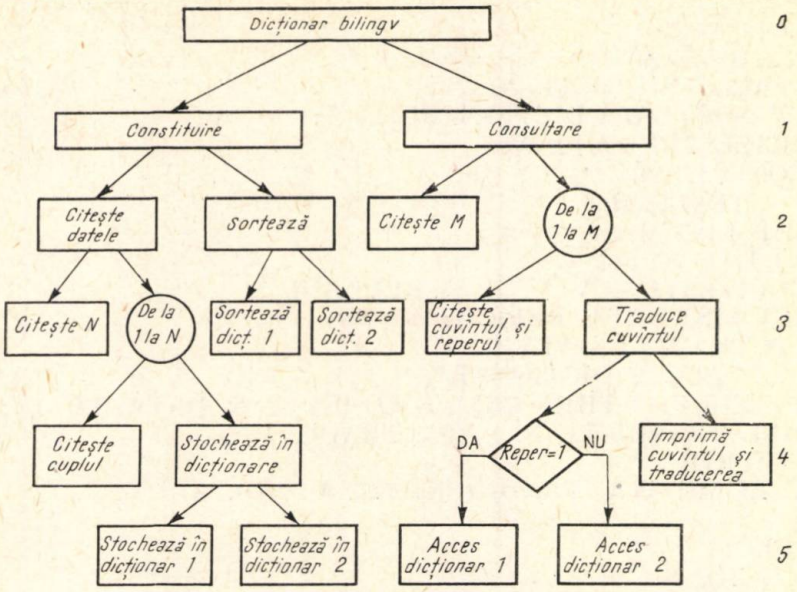


Fig 10.

Vom încerca scrierea acestui program în limbajul PL/1, presupunînd (pentru simplificare) că dispunem de următoarele proceduri în biblioteca de programe:

— TRI (DICT, N): sortează în ordine alfabetică dicționarul DICT, de dimensiune N.

— DICO (DICT, N, DATA, TRAD): caută în dicționarul DICT (prin metoda dicotomiei, de exemplu, cuvîntul DATA și pune traducerea lui în TRAD.

Comentariile din program scot în evidență traducerea arborelui de programare.

```
DICTO: PROC OPTIONS (MAIN);
/* DECLARAREA VARIABILELOR*/
DCL (N, M, I) FIXED (6), REPER FIXED (1), (DATA, TRAD) CHAR (20);
  /* CONSTITUIRE */
    /* CITEȘTE N */
    GET LIST (N);
BLC: BEGIN; DCL (DICT1 (N, 2), DICT2 (N, 2)) CHAR (20);
  DO I = 1 TO N;
    /* CITEȘTE CUPLUL */
  GET LIST (DATA, TRAD);
  /* STOCHEAZĂ ÎN DICȚIONARUL 1 */
    DICT1 (I, 1) = DATA; DICT1 (I,2) = TRAD;
  /* STOCHEAZĂ ÎN DICȚIONARUL 2 */
    DICT2 (I, 1) = TRAD; DICT2 (I, 2) = DATA;
```

```
END;
/* SORTEAZĂ */
  /* SORTEAZĂ DICȚIONARUL 1 */
    CALL TRI (DICT1, N);
    /* SORTEAZĂ DICȚIONARUL 2 */
    CALL TRI(DICT2, N);
/* CONSULTARE */
  /* CITEȘTE M */
  GET LIST(M);
  DO I=1 TO M;
   /* CITEȘTE CUVÎNTUL ȘI REPERUL */
  GET LIST(DATA, REPER);
    /* TRADUCE DATA */
      /* ACCES DICȚIONARE */
  IF REPER=1 THEN CALL DICO(DICT1, N, DATA, TRAD); ELSE
  CALL DICO(DICT2, N, DATA, TRAD);
 /* IMPRIMA */
PUT EDIT(DATA, TRAD) (SKIP(2), A, X(4), A);
END;
END BLC;
END DICTO;
```

Observații: 1. În elaborarea arborelui de programare ne-am oprit la nivelul 5, care de altfel poate fi continuat în funcție de posibilitățile limbajului de codificare al programului. În general pentru reprezentarea programelor de mari dimensiuni se indică numai primele nivele ale arborelui de programare, asigurîndu-se astfel o informare rapidă și clară asupra programului, fără complexitatea detaliilor dependente de limbaj.

2. Arborele de programare precedent conține și ideea de concepere a programului (constituirea dicționarului, citirea datelor, consultarea etc.), care uneori poate fi eliminată, reprezentîndu-se numai ierarhia instrucțiilor din program (fig. 11).

Se recomandă totuși păstrarea blocurilor de termeni generali pentru facilitarea citirii programului.

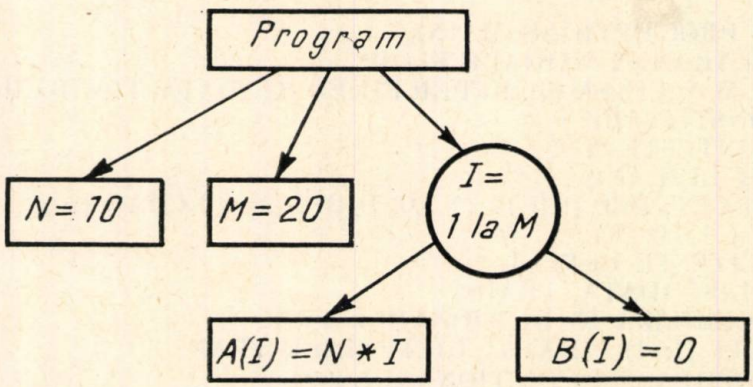


Fig. 11

Structuri de control

Bazele matematice ale programării structurate au fost puse de Böhm și Jacopini [4], care demonstrează că orice program poate fi scris utilizînd numai 3 tipuri de structuri:

— tratare secvențială,

— instrucțiune de decizie logică (IF... THEN ... etc.),

— instrucțiune repetitivă (DO WHILE, DO UNTIL, REPEAT UNTIL etc.).

Se observă că instrucțiunea GOTO nu mai este necesară. Multe discuții s-au purtat în legătură cu eliminarea instrucțiunii GOTO din limbajele de programare, mergîndu-se pînă la elaborarea de limbaje de programare în care lipsesc branșamentele [9], [10]. De asemenea, s-a crezut că este suficient de a nu folosi instrucțiunea GOTO pentru a face programare structurată, ceea ce nu este deloc exact.

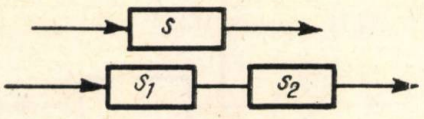
După apariția articolelor lui Dijkstra [1], [5] au fost propuse o serie de structuri de control, care nu folosesc instrucțiunea GOTO, sau o înlocuiesc cu alt gen de instrucțiuni (EXIT, RETURN etc.).

O sinteză a acestora se află în [6] din care prezentăm numai pe cele mai importante:

a) Structura D (de la Dijkstra) care utilizează următoarele primitive:

· acțiune de bază

· compoziție



· instrucțiuni condiționale: IF ... THEN . .. ELSE ... (figura 12).

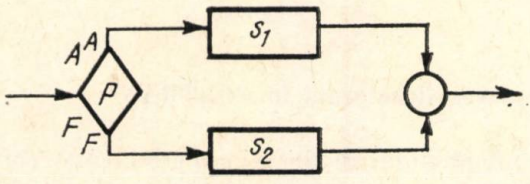


Fig. 12

· instrucțiunea repetitivă de forma „WHILE p DO s", unde s este o structură D, iar p un predicat (figura 13)

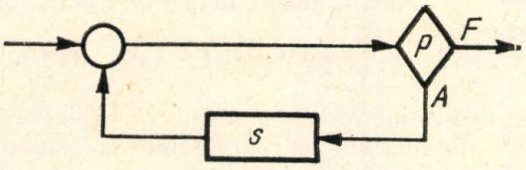


Fig. 13

b) Structura D': este o extindere a structurii D. Se adaugă:

· instrucțiunea condițională simplă (figura 14)

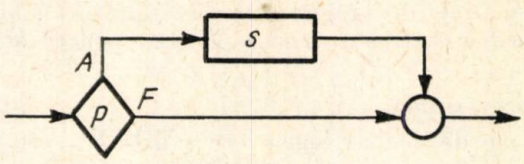


Fig. 14

· branșamentul de tip N-CASE: (figura 15)

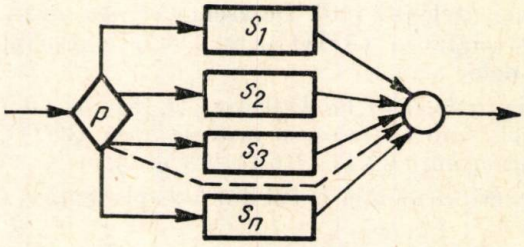


Fig. 15

· REPEAT UTIL (figura 16)

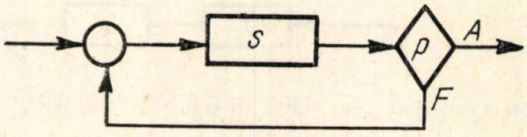


Fig. 16

Programarea structurată în FORTRAN

Codificarea programului în limbajul FORTRAN conform principiilor programării structurate ridică unele probleme, deoarece:

— limbajul FORTRAN nu are structură de bloc. Grupul de instrucțiuni de tipul „BEGIN ... END " din ALGOL W, PL/1 sau „DO ... END" din PL/1 se poate realiza în FORTRAN numai prin utilizarea instrucțiunii de salt GOTO;

— instrucțiunea de selecție există în genul instrucțiunii GOTO obligînd saltul la diverse etichete;

— instrucțiuni de tipul „DO WHILE" sau „REPEAT UNTIL" nu există.

Toate acestea determină programatorul să utilizeze în mod frecvent instrucțiunea GOTO, instrucțiune pe care tehnica programării structurate caută să o elimine din însăși procedura de concepere a programului.

Pentru scrierea structurată a programelor în FORTRAN trebuie convertite structurile de control specifice programării structurate în acest limbaj. Se cunosc două căi pentru rezolvarea acestei probleme:

a) realizarea structurilor de control cu instrucțiunile din FORTRAN [12];

b) scrierea în clar a structurilor de control și traducerea lor în FORTRAN cu ajutorul unui preprocesor [13].

În materialul de față abordăm prima metodă; vom realiza diagramele structurii D'.

1. Compoziția rezultă din scrierea secvențială a instrucțiunilor. Cum nu există delimitatori de început și sfîrșit de bloc, cînd este necesar programatorul trebuie să folosească instrucțiunea GOTO, așa cum se va vedea în construcțiile următoare.

2. Selecția: IF p THEN S ELSE T, se poate realiza astfel:

```
      IF (·NOT·p) GOTO 10
         S
      GOTO 11
   10   T
   11 CONTINUE
```

Am preferat să facem testul asupra negației condiției p pentru a obține ordinea obișnuită a blocurilor din instrucțiunea de selecție.

Selecție simplă: IF p THEN S

```
      IF (·NOT·p) GOTO 20
         S
      20 CONTINUE
```

Selecția generalizată: CASE I OF (SI, S2, ... SN)

```
      GOTO (31, 32, ...) I
      31     S1
        GOTO  30
      32      S2
        GOTO  30
      ------------------------------
      30 CONTINUE
```

3. Repetiția: DO WHILE (p); S; END

```
      40 IF (·NOT·p) GOTO 41
           S
         GOTO 40
      41 CONTINUE
```

Repetiția: REPEAT S UNTIL p

```
      50 CONTINUE
        S
        IF (·NOT·p) GOTO 50
```

Iterația poate fi realizată și cu instrucțiunea „DO (etichetă) var = N1, N2, N3", care nu pune nici o problemă asupra clarității programului.

Cu aceste structuri de control se poate trece la codificarea în FORTRAN a programelor, pornind de la arborele de programare. În scrierea programelor se recomandă folosirea numerelor de etichetă în ordine crescătoare și succesive pentru începutul și sfîrșitul de bloc. Descrierea structurii programului se poate face prin cartele de comentariu.

Exemplu. Să se calculeze primele 50 de numere prime.

Problema se descompune în trei părți (fig. 17)

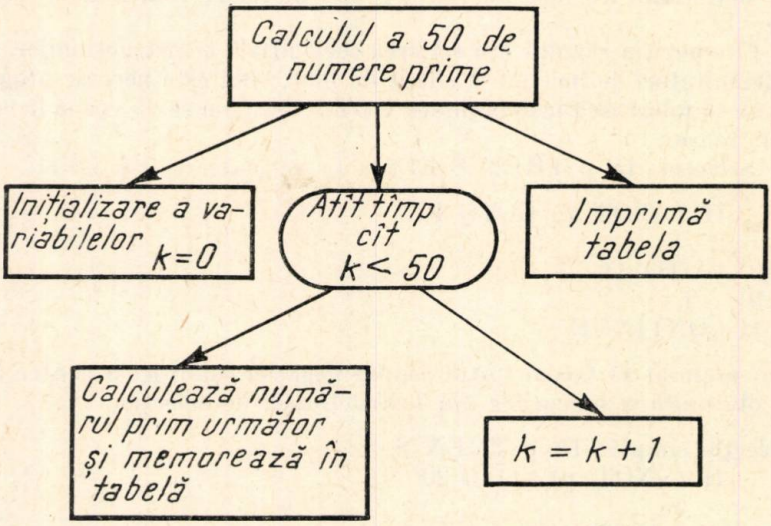

Calculul a 50 de numere prime
Inițializare a variabilelor k=0
Atît timp cît k< 50
Imprimă tabela
Calculează numărul prim următor și memorează în tabelă
k = k + 1

Fig. 17

a) inițializarea variabilelor,

b) calculul celor 50 de numere prime și memorarea lor într-o tabelă,

c) imprimarea tabelului.

Notăm cu NP tabelul de numere prime.

Algoritmul de calcul al unui număr prim J este următorul: se împarte J cu fiecare număr prim din tabelul NP; dacă nici o împărțire nu este exactă se memorează J în tabelul NP. La prima împărțire exactă se trece la testarea numărului următor înlocuindu-se J cu J + 1. Inițial NP(1) = 1, NP(2) = 2, J = 3. Evident se va evita împărțirea lui J cu primul element al tabelului.

Accelerarea algoritmului se poate face ținînd cont de următoarele observații, [1]:

— toate numerele prime sînt impare, deci J (inițial 3) se va incrementa cu 2. În acest caz apare inutilă împărțirea cu NP(2);

— împărțind J cu numerele prime din tabel în ordine crescătoare vom opri procesul de împărțire la primul număr prim al cărui pătrat este mai mare ca J(două numere prime consecutive p_n, p_{n+1}, satisfac relația $p_n^2 > p_{n+1}$).

Arborele de programare este prezentat în figura 18 unde

J — reprezintă numărul de testat; K — numărul curent de numere prime;

I — indexul de parcurgere al tabelului NP, I = 3, 4, 5, ...;

BOOL — variabilă booleană ce semnalează o împărțire exactă.

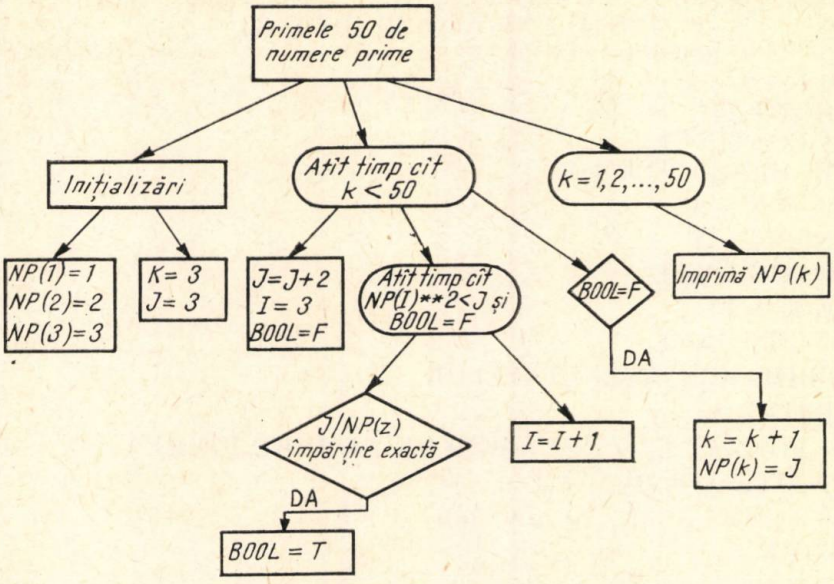


Fig. 18

Codificare.

```
C CALCULUL PRIMELOR 50 DE NUMERE PRIME
C J ESTE NUMĂRUL DE TESTAT, K NR. CURENT DE NUMERE PRIME
C I ESTE INDEXUL DE PARCURGERE AL TABELEI NP DE NUMERE
C PRIME
C BOOL ESTE O VARIABILĂ BOOLEANĂ CE SEMNALEAZĂ O ÎMPĂR-
C ȚIRE
C EXACTA
C ÎN FINAL NP CONȚINE NUMERELE PRIME
      DIMENSION NP(50)
      LOGICAL BOOL
C INIȚIALIZAREA VARIABILELOR
      NP(1) = 1
      NP(2) = 2
      NP(3) = 3
      K = 3
      J = 3
C CALCULUL DE DETECTARE AL NUMĂRULUI PRIM
   10 IF (K. GE. 50) GOTO 11
      J = J + 2
      I = 3
      BOOL = .FALSE.
```

```
      20 IF ((NP(I) ** 2.GT.J).OR.BOOL) GOTO 21
         IF (J-J/NP(I) * NP(I).NE.O) GOTO 30
            BOOL = .TRUE.
      30 I = I + 1
         GOTO 20
      21 CONTINUE
         IF (BOOL) GOTO 40
         K = K + 1
         NP(K) = J
      40 CONTINUE
         GOTO 10
      11 CONTINUE
C IMPRIMAREA REZULTATELOR
         PRINT 50
      50 FORMAT (//' PRIMELE 50 DE NUMERE PRIME')
         WRITE (108, 60) (NP(I), I = 1,50)
      60 FORMAT (2X, 10 (2X, I4))
         STOP
         END
```

Programarea structurată în COBOL

Deşi nu are o structură de bloc, limbajul COBOL permite aplicarea în practică a metodei programării structurate. Pentru aceasta în tabelul 1 sînt prezentate o serie de corespondenţe:

Tabelul 1

STRUCTURI DE CONTROL	INSTRUCŢIUNI COBOL
IF ... THEN ...	IF < condiţie> <acţiune>
IF ... THEN ... ELSE ...	IF <condiţie> <acţiune 1> ELSE <acţiune 2>
DO WHILE	PERFORM <procedură> UNTIL <condiţie>
BLOCK	PERFORM <procedură>, sau CALL ...
CASE – OF	IF <condiţie 1> <acţiune 1> ELSE IF <condiţie 2> <acţiune 2> ELSE IF ...

Problemă

Să se obţină informaţiile necesare privind intrările cantitativ-valorice pe simbol de material.

Organigrama generală pentru rezolvarea acestei probleme este prezentată în fig. 19.

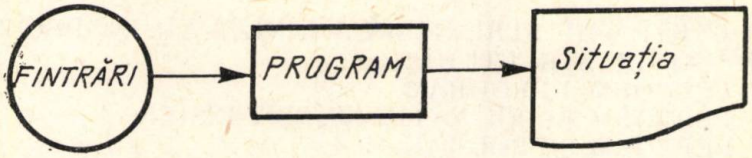


Fig. 19

Observație. Articolele fișierului FINTRARI sînt ordonate în funcție de valorile crescătoare luate de indicatorul de grupare *simbol de material.*

Pe baza specificațiilor problemei se construiește arborele de programare prezentat în figura 20. BLOC 2 se execută pînă se constată ruptura de secvență.

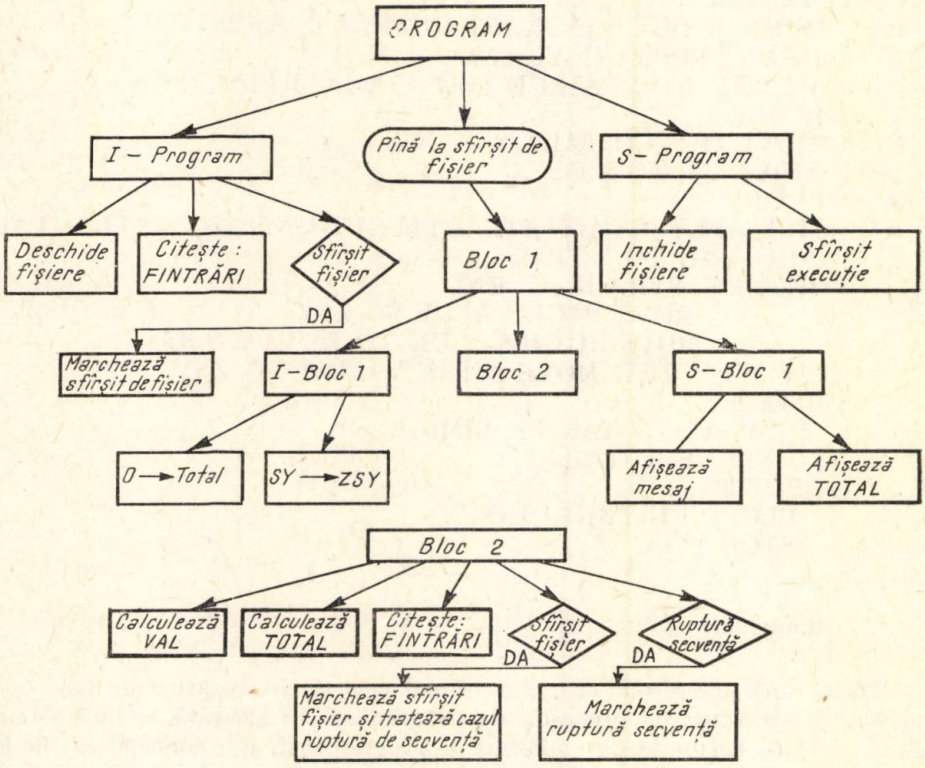


Fig. 20

Trecerea de la arborele de programare la programul COBOL se face aplicînd următoarele reguli:

1. Partea de structură a diviziunii de procedură se obține prin codificarea elementelor de structură din arborele de programare, nivel cu nivel, începînd din stînga în ordinea executării în cadrul programului.

2. Partea de prelucrare a diviziunii de procedură se obține prin codificarea elementelor de prelucrare din arborele de programare, de la stînga spre dreapta.

```
D S  ** PARTEA DE STRUCTURĂ A DIVIZIUNII DE PROCEDURĂ
I T  **** NIVEL STRUCTURĂ 1
V R     PERFORM I-PROGRAM
I U     PERFORM BLOC1 UNTIL SFÎRȘIT-FIȘIER
Z C     PERFORM S-PROGRAM.
I T  **** NIVEL STRUCTURĂ 2
U U   BLOC-1.
N R     PERFORM I-BLOC1
E A     PERFORM BLOC2 UNTIL RUPTURA-SECVENȚA
A       PERFORM S-BLOC1.
      ** PARTEA DE PRELUCRARE A DIVIZIUNII DE PROCE-
      *  DURA
D P   I-PROGRAM.
E R     OPEN INPUT FINTRARI OUTPUT LISTA.
  E     READ FINTRARI AT AND
P L       MOVE HIGH-VALUE TO DATA-INTRĂRII.
R U   I-BLOC1.
O C     MOVE 0 TO TOTAL
C R     MOVE SY TO ZSY.
E A   BLOC2.
D R     MULTIPLY CANTITATE BY PRET-UNITAR GIVING VAL
U E     ADD VAL TO TOTAL
R       READ FINTRARI AT END
A                MOVE HIGH-VALUE TO ZSY
                 MOVE HIGH-VALUE TO DATA-INTRĂRII.
        IF SY = ZSY MOVE HIGH-VALEU TO ZSY.
      S-BLOC-1.
        DISPLAY 'TOTAL PE SIMBOL'
        DISPLAY TOTAL.
      S-PROGRAM.
        CLOSE FINTRARI LISTA
        STOP RUN.
```

Concluzie

Dacă pînă acum s-au discutat numai cele două trăsături de bază ale programării structurate, procesul de programare structurată trebuie văzut înglobînd toate acțiunile de elaborare a programului, de conceperea lui la scriere, punere la punct, implantare, testare și elaborarea documentației.

Utilizarea arborelui de programare apropie activitatea de programare de cea de definire a problemei cu ajutorul modelului matematic de prelucrare. Cercetările noastre sînt îndreptate către normalizarea activității de programare în așa fel încît pentru o problemă dată, utilizînd structurile de control mai sus definite, să obținem un singur arbore de programare, arbore care să fie o reflectare fidelă a formei algebrice de definire a problemei.

Trecerea de la modelul matematic (forma algebrică) la algoritm (care conține modul de rezolvare pe calculator a modelului) poate să fie realizată parțial sau chiar integral cu ajutorul unui generator automat de programe.

B. ORGANIZAREA ACTIVITĂȚII DE ELABORARE SOFTWARE

Preocupările de inginerie software sînt generate de cauze multiple printre care se pot enumera în afara celor deja menționate și următoarele:

— Complexitatea sistemelor de programe ale calculatoarelor este în continuă creștere, numărul de instrucțiuni ale acestora pentru un sistem de operare și programare (inclusiv pachete de programe standard) depășind curent 1—2 milioane.

— Productivitatea unui programator este limitată și nu depășește 10—20 instrucțiuni testate pe zi, ca medie pe toată durata proiectului.

— Separarea echipei elaboratoare a unui produs software de echipa ce-l întreține în exploatare este impusă de numărul mare de utilizatori ai unui produs software. Organizarea unui service software eficient devine la fel de vitală pentru viața unui produs ca și organizarea activității de service pentru produsele hardware.

— Numărul de anomalii care însoțesc un sistem de programe complex este extrem de mare în valoare absolută, deși în valoare relativă este probabil cel mai mic obținut în tehnica modernă. Cel mai perfecționat sistem de operare din lume OS/360 lansat de firma I.B.M. avea la fiecare versiune în jur de 1000 anomalii, ceea ce poate fi estimat ca o eroare la 10 posibilități de a comite erori. Fiecare eroare reală se traduce printr-o anomalie care perturbă exploatarea sistemului în anumite condiții.

— Numărul de anomalii poate crește și datorită punerilor la zi care încearcă lichidarea anomaliilor, fiecare astfel de operație fiind o sursă potențială de noi erori. Pe de altă parte, utilizatorii nu semnalează decît un număr limitat al acestor anomalii găsind rapid metode de listare a lor, reducînd astfel șansele de perfecționare a sistemului.

— Documentația care însoțește sistemele de programe este de regulă insuficientă, inexactă, inadecvată și confuză. Volumul de programe produse conform cerințelor pieții este mult mai mare decît capacitatea și ciclul de elaborare de documentații corespunzătoare. Multe versiuni de sisteme de programe sînt scoase din uz înainte ca documentația să fi ajuns la un nivel de finisare acceptabil.

— Standardizarea programării este încă practic inexistentă, standardele existente fiind sau necunoscute sau ignorate.

Problemele de mai sus confruntă în prezent tehnica de calcul mondială fiind caracteristice tuturor firmelor din lume, inclusiv cele foarte mari. Ca rezultat, activitatea de elaborare a sistemelor de programare începe să fie organizată în cicluri de o fabricație asemănătoare oricărui alt produs industrial și cu aplicarea de „tehnologii" specifice. Desigur, există și deosebiri principale, una din ele fiind aceea că faza de fabricație coincide în cazul produselor software cu cea de cercetare-dezvoltare, lipsind faza de fabricație de serie. În schimb distribuirea și întreținerea programelor pun probleme mai complicate decît a celorlalte produse industriale. Produsul hardware se multiplică în sute

sau mii de exemplare, condiția principală fiind menținerea calității la fiecare exemplar din serie. Produsul software este unul singur, dar multiplicat în „oglindă" ajunge la sute sau mii de utilizatori. În aceste condiții, este primordială păstrarea integrității lui deoarece unele modificări, care de altfel se pot face relativ ușor asupra acestor „imagini", pot anihila orice efort de întreținere și dezvoltare a produsului.

Se poate considera că elaborarea unui sistem de programe are următoarele faze:

— studii de fezabilitate (aspecte tehnico-economice și de marketing);
— activitatea de dezvoltare a sistemului;
— întreținerea sistemului după implantarea lui la utilizatori.

În tabelul 2 se prezintă valorile medii ale ponderii cheltuielilor pentru fiecare din aceste faze conform unor date ale firmei I.B.M.

Tabelul 2

Faza	Subfaza	Buget	
Fezabilitate			10%
Dezvoltare			65%
din care:	Cercetare-proiectare	13%	
	Codificare, testare internă documentații	20%	
	Validare	32%	
Intreținere			25%

Activitatea de dezvoltare se subdivide în:

— faza de cercetare-proiectare, în care pe baza specificațiilor rezumate din studiul de fezabilitate, se alcătuiește proiectul detaliat al programului;
— faza de codificare în care se scrie fiecare instrucțiune a programului și se testează de elaborator. Totodată se alcătuiește o primă formă a documentației produsului;
— faza de validare în care un colectiv complet independent verifică produsul software supunîndu-l la teste controlînd îndeplinirea completă a specificațiilor și mai ales caută depistarea anomaliilor din produs.

O organizare bună a unui sector de elaborare de software este aceea în care după faza de validare produsul software este stabilizat, adică numărul de anomalii detectate ulterior rămîne mic și de valoare constantă în timp.

Anomaliile sînt analizate și corectarea lor în sistemul de programe se face prin secvențe de corecție numite patch-uri care sînt inserate în sistemele din centrele de calcul de către personalul specializat de întreținere (service). Acest personal are, de asemenea, și sarcina de a implementa noile versiuni ale sistemelor de programe și de a acorda asistență tehnică pentru exploatarea acestora.

Dintre fazele mai sus prezentate cea mai costisitoare este validarea sau testarea independentă, care implică angajarea atît a unei manopere importante cît și a unor resurse serioase de calculator. Reducerea costului validării

se poate face atît printr-o bună organizare a acestei activități cît și, mai ales, prin reducerea numărului de erori și creșterea productivității muncii în fazele de elaborare și codificare. Pentru aceasta au fost puse la punct metode specifice de inginerie software printre care se pot menționa programarea structurată și echipa programatorului șef.

Programarea structurată a fost prezentată mai sus. Ea limitează la minimum numărul de structuri ce pot exista în programe, acestea cîștigînd în claritate, putînd fi întreținute cu un cost ce ajunge pînă la 50% mai mic, crescînd enorm productivitatea programării.

Echipa programatorului șef este o metodă de organizare a producției de software care se bazează pe stabilirea unor structuri-tip de echipă de programare și delimitare precisă a atribuțiilor fiecărui membru al echipei, precum și pe stabilirea unor metodologii de lucru.

Conform acestei metode, echipa de programare [15], [16], se compune din:

— un programator șef, cu funcții de coordonare a întregului proiect și de realizare a modulelor critice. El structurează sistemul, definește specificațiile generale ale fiecărui modul și testează buna funcționare a sistemului;

— un programator șef adjunct, cu funcție similară programatorului șef;

— o secretară programator cu sarcini pe linia organizării și ținerii la zi a documentației proiectului (note de programare, listinguri, fișiere etc.).

— unul sau mai mulți programatori, cu sarcini în realizarea modulelor ce compun sistemul.

Metoda echipă a programatorului-șef, marchează trecerea de la programarea individuală la programarea colectivă.

Rolul celor două metode de raționalizare a complexei activități de programare este redată în fig. 21.

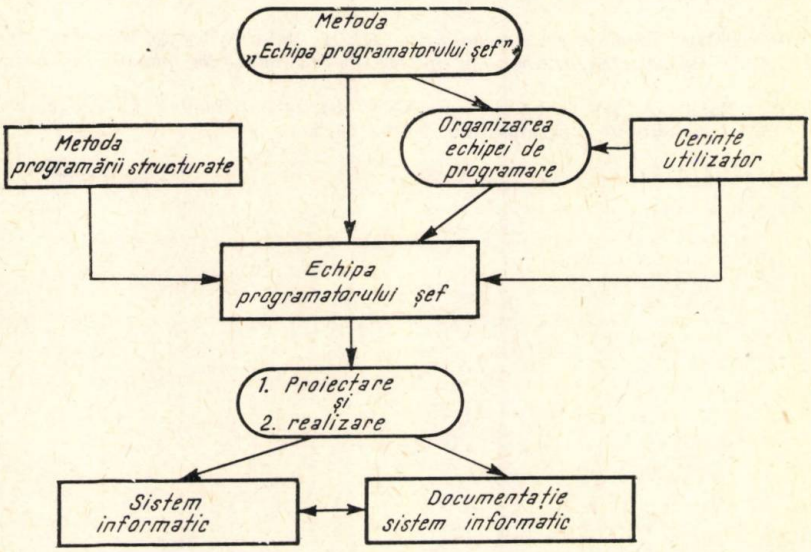


Fig. 21

Aplicînd cele două metode de inginerie software se obțin sporuri spectaculoase ale productivității muncii în programe, precum și reducerea drastică a numărului de erori. Se pretinde că se pot atinge performanțe de 10.000 instrucțiuni și o singură eroare pentru o manoperă de 1 om/an. Aceasta în timp ce nu de mult (1965—1970) nu se putea concepe mai mult de 600—800 instrucțiuni pe om-an, valori care sînt raportate de exemplu, pentru sistemul OS/300 de la I.B.M.

BIBLIOGRAFIE

1. E. W. DIJKSTRA: *GO TO statement considered harmful.* C.A.C.M., vol. 11, nr. 3 March 1968.
2. D. E. KNUTH: *Structured programming with GO TO statements.* A.C.M. Computing Surveys, vol. 6, nr. 4, Dec. 1974.
3. M. T. BERTINI, Y. TALLINEAU: *Le COBOL structuré.* Ed. d'informatique, Paris, 1974.
4. C. BOHM, G. JACOPINI: *Flow Diagrams, Turing Machines and Languages with only Two Formation Rules.* C.A.C.M. VOL. 9, nr. 5, 1966, pag. 366—371.
5. E. W. DIJKSTRA: *Notes on Structured Programming.* The Netherlands, second edition, 1970.
6. H. F. LEDGARD, H. MAROTTY: *A genealogy of control structures.* C.A.C.M. vol. 8, nr. 11, 1975.
7. S. R. KOSARAJU: *Analysis of structured programs.* J. Computer and System Sciences, vol. 9, nr. 3, December 1974.
8. H. D. MILLS: *Top down programming in large systems.* In „Debugging techniques in large systems", Randall Rustin (ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
9. J. ARSAC: *Un langage de programmation sans branchements.* R.A.I.R.O., juin 1972, B-2.
10. N. WIRTH: *The programming language PASCAL,* Acta Informatica, 1, 1, 1971.
11. O. J. DAHL, E. W. DIJKSTRA, C.A.R. HOARE: *Structured programming.* Academic Press, London, England, 1972.
12. T. TENNY: *Structured programming in FORTRAN.* Datamation, july 1974, pag. 110.
13. E. HOROWITZ: *FORTRAN: can it be structured — should it be?.* Computer, june 1975. pag. 30—37.
14. R. AMSTRONG: *Modular programming in COBOL.* John Wiley & Sons Inc. 1973.
15. V. BALTAC: *Optimizarea sistemelor de operare ale calculatoarelor numerice.* Editura Facla, 1974.
16. Y. TABOURIER, A. ROCHFELD, C. FRANK: *La programmation structurée en informatique.* Les editions d'organisation, Paris, 1975.

22.XI.1976

ÎN AJUTORUL CELOR CE DORESC SĂ SUSȚINĂ CONCURSUL DE ADMITERE LA FACULTĂȚILE A.S.E.

Probleme date la concursul de admitere, sesiunea iulie 1976

Algebră și elemente de analiză

1. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a-b}{x+a-b}.$$

Indicații: Aducînd la același numitor ecuația devine

$$\frac{x(a-b)}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{x+a-b} \text{ sau } 2ax = ab$$

de unde $x = \frac{b}{2}$. Trebuie ca $2a \neq b$ și $b \neq 0$.

2. a) *Să se rezolve sistemul de ecuații*

$$x + y + z = 1$$
$$ax + by + cz = d$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2.$$

b) *Discuție.*

Indicații: a) Eliminînd pe z obținem:

$$(c-a)\,x + (c-b)\,y = c - d$$
$$a(c-a)\,x + b(c-b)\,y = d(c-d).$$

De unde rezultă:

$$x = \frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}\ ;\ y = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)};\ z = \frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-c)}$$

dacă: $a \neq b$; $a \neq c$, $b \neq c$.

b) Pentru

$a = b$ { $c = a$ { $d = a \Rightarrow$ sistemul are o dublă infinitate de soluții; $d \neq a$ sistemul este imposibil. / $c \neq a$ { $d = a \Rightarrow z = 0$ și x, y nedeterminate; $d \neq a$ { $d = c \Rightarrow$ nedeterminare; $d \neq c \Rightarrow$ imposibil

ș.a.m.d.

3. a) *Să se calculeze determinantul*

$$D = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} & e^{2a} \end{vmatrix}$$

b) *Să se rezolve ecuația* $D = 0$.

Indicații: a) $D = e^{2(2x+a)} + 2e^{-(2x+a)} - 3$.

b) Notînd $e^{2x+a} = u$ se obține ecuația

$$u^2 + \frac{2}{u} - 3 = 0$$

sau $u^3 - 3u + 2 = 0$ ale cărei rădăcini sînt:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = -2 \text{ (nu convine).}$$

Pentru $e^{2x+a} = 1 \Rightarrow 2x + a = 0$, de unde $x = -\frac{a}{2}$.

4. *Folosind șirul lui Roll să se discute natura rădăcinilor ecuației*

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 + m = 0$$

după valorile parametrului m *real.*

Indicații: $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x = 0$,

ale cărui rădăcini sînt $x_1 = 0$, x_2, x_3 complexe. $P(0) = m$.

		$-\infty$				0								$+\infty$
$P'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$m < 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$m = 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$m > 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Rezultă:

1) pentru $m < 0 \Rightarrow$ 2 rădăcini unde $x_1 > 0$, $x_2 < 0$;

2) pentru $m = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$;

3) pentru $m > 0 \Rightarrow$ rădăcini complexe.

5. *Într-o progresie aritmetică de patru termeni rația este 2 iar produsul celor patru termeni este 105. Să se afle progresiile aritmetice care au această proprietate.*

Indicații: Dacă termenii progresiei sînt de forma:

$$x,\ x + 2,\ x + 4,\ x + 6$$

ecuația din enunț se scrie

$$x(x + 2)\ (x + 4)\ (x + 6) = 105,$$

sau

$$x^4 + 12x^3 + 44x^2 + 48x - 105 = 0$$

ale cărei soluții sînt: $x_1 = 1$, $x_2 = -7$ și două rădăcini complexe.

6. *Se consideră funcția* $f(x) = \sqrt{x}$ *pe intervalul* [100, 104]. *Aplicînd formula creșterilor finite să se arate că* $\sqrt{104} - 10 < 0{,}2$.

Indicații: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\sqrt{104} - \sqrt{100} = (104 - 100)\frac{1}{2\sqrt{\zeta}} \text{ cu } \zeta \in (100, 104).$$

Deci: $(\sqrt{104} - \sqrt{100}) = \dfrac{1}{2\sqrt{\zeta}} < \dfrac{4}{2\sqrt{100}} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2 \Rightarrow \sqrt{104} - 10 < 0{,}2.$

7. *Fie expresia*:

$$E = \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}.$$

a) *Dacă notăm* $\sqrt{x-1} = t$ *să se exprime* E *în funcție de* t.

b) *Să se rezolve ecuația* $E = 1$.

Indicații: a) Se calculează succesiv

$$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (x-1) - 4\sqrt{x-1} + 4 = (\sqrt{x-1} - 2)^2 = (t-2)^2$$

și

$$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (x-1) - 6\sqrt{x-1} + 9 = (\sqrt{x-1} - 3)^2 = (t-3)^2.$$

Prin urmare:

$$E = \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = |t-2| + |t-3|.$$

Dacă $t \leqslant 2$, atunci $E = -t + 2 - t + 3 = -2t + 5$.

Dacă $2 < t < 3$, atunci $E = t - 2 - t + 3 = 1$.

Dacă $t \geqslant 3$, atunci $E = t - 2 + t - 3 = 2t - 5$.

b) Ecuația $E = 1$ are soluție în t pentru $2 \leqslant t \leqslant 3$.

Deci $2 \leqslant \sqrt{x} - 1 \leqslant 3$, sau $4 \leqslant x - 1 \leqslant 9$ adică $5 \leqslant x \leqslant 10$.

8. *Fie binomul* $(1 + x)^n$. *Să se determine* n *știind că coeficienții termenilor al 5-lea, al 6-lea și al 7-lea sînt în progresie aritmetică.*

Indicații: Dezvoltînd după formula lui Newton se obține:

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + C_n^4 x^4 + C_n^5 x^5 + C_n^6 x^6 + \ldots$$

Relația din enunț este:

$$2\,C_n^5 = C_n^4 + C_n^6$$

sau:

$$2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}$$

sau

$$2\frac{n-4}{5} = 1 + \frac{(n-4)(n-5)}{5 \cdot 6}$$

de unde se obține ecuația

$$n^2 - 21n + 98 = 0$$

cu rădăcinile

$$n_1 = 7, \quad n_2 = 14.$$

9. *Fie ecuația* $x^3 + p^2x + qx + p = 0$.

a) *Să se determine* p *și* q *astfel încît această ecuație să admită rădăcinile*

$$x_1 = -\sqrt{3} \text{ și } x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

b) *Să se găsească și a treia rădăcină.*

Indicații: a) Deoarece $x_1 = -\sqrt{3}$ și $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ rezultă $x_1 + x_2 = 2$.

Din relația $x_1 + x_2 + x_3 = -p \Rightarrow x_3 = -p - 2$.

Din relația $x_3(x_1 + x_2) + x_1x_2 = q \Rightarrow 2x_3 - 3 - 2\sqrt{3} = q$ sau $q = -2p - 2\sqrt{3} - 7$.

Înlocuind valorile lui x_1 și x_2 în relația:

$$x_1x_2x_3 = -p$$

rezultă: $(-3 - 2\sqrt{3})\, x_3 = -p \Rightarrow (3 + 2\sqrt{3})(-p - 2) = p$.

Deci $p = -\sqrt{3}$ și $q = -7$.

b) A treia rădăcină va fi egală cu:

$$x_3 = \sqrt{3} - 2.$$

10. *Fie ecuația* $x^4 + 4mx + 6n = 0$. *Să se găsească relația dintre* m *și* n *astfel încît ecuația dată să aibă o rădăcină dublă.*

Indicații: Prin derivare se obține: $4x^3 + 4m = 0$.

Ecuațiile $x^4 + 4mx + 6n = 0$ și $4x^3 + 4m = 0$ trebuie să aibă o rădăcină comună. Fie aceasta $x = \alpha$. Din a doua ecuație rezultă $\alpha^3 = -m$. Se înlocuiește în prima ecuație și se obține:

$$-m\alpha + 4m\alpha + 6n = 0 \text{ adică } 3m\alpha + 6n = 0 \text{ de unde rezultă}$$

$$\alpha = -\frac{2n}{m}.$$

De unde rezultă:

$$\left(-\frac{2n}{m}\right)^3 + m = 0 \Rightarrow m^4 = 8n^3.$$

11. *Se consideră funcția* f *definită prin*

$f(x) = (ax + b)^2 + (cx + d)^2$; $(a \neq 0,\ c \neq 0)$.

a) *Să se determine valoarea lui* x *pentru care avem un extremum și să se precizeze dacă este un maxim sau un minim.*

b) *Să se calculeze valoarea corespunzătoare a funcției.*

Indicații: a) Se scrie funcția sub forma:

$$f(x) = (a^2 + c^2)\, x^2 + 2(ab + cd)\, x + (b^2 + d^2).$$

Se anulează derivata întîi

$$f'(x) = 2(a^2 + c^2)\, x + 2(ab + cd) = 0$$

și se obține punctul de extrem

$$x_0 = -\frac{ab + cd}{a^2 + c^2}.$$

Pentru sgn (a) = sgn (b); sgn (c) = sgn (d) și deoarece $a \neq 0$ și $c \neq 0 \Rightarrow a^2 + c^2 > 0 \Rightarrow x_0$ este punct de minim.

b) $f(x_0) = \dfrac{(ad - bc)^2}{a^2 + c^2}$.

12. *Se consideră funcția f definită pe* $(0, +\infty)$ *prin egalitatea*

$$f(x) = (1 + x)^{1/x}.$$

a) *Să se arate că funcția este monotom descrescătoare.*

b) *Să se calculeze:*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) \text{ și } \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Indicații: a) Avem $\ln f(x) = \dfrac{1}{x} \ln (1 + x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \ln (1 + x) + \frac{1}{x(1 + x)}.$$

Deci $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\left[\dfrac{x}{1 + x} - \ln (1 + x)\right]$.

Notăm $h(x) = \dfrac{x}{1 + x} - \ln (1 + x)$

$$h'(x) = -\frac{x}{(1 + x)^2} < 0; \; h(0) = 0 \Rightarrow h(x) < 0 \text{ pe } (0, +\infty)$$

deci $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2} h(x) < 0$ pe $(0, +\infty)$.

b) Avem: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} \ln (1 + x) = 1$

adică $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = e$.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln (1 + x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{1 + x}}{1} = 0$$

deci $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^0 = 1$.

Geografia R.S.R.

1. A. Dunărea (fără afluenții din România).
   B. 1) Caracterele generale ale Carpaților românești.
   2) Cîmpia Transilvaniei.
   3) Principalele orașe din Moldova.
   4) Căile maritime.

2. A. Lunca și Delta Dunării.
   B. 1) Lacurile de deal și de podiș.
   2) Populația urbană și rurală.
   3) Plantele textile.
   4) Transporturile aeriene.

3. A. Industria siderurgică în R. S. România (industria extractivă a minereurilor feroase și metalurgia feroasă).
   B. 1) Afluenții Dunării din grupa de sud-vest.
   2) Podișul Mehedinți.
   3) Densitatea populației în zona muntoasă.
   4) Regiunea turistică a Carpaților meridionali.

4. A. Cîmpiile din R. S. România (fără lunci).
   B. 1) Solurile zonale.
   2) Depresiunea Țării Bîrsei (a Brașovului)
   3) Podgoriile din Moldova.
   4) Porturile fluviale.

Economie politică

1. A. Productivitatea muncii și căile creșterii ei. Directivele Congresului al XI-lea al P.C.R. privind creșterea productivității muncii.
   B.1) Enumerați principiile generale ale organizării, conducerii și planificării activității economice în socialism.
   2) În ce constă organizarea internă a cooperativelor agricole de producție?
   3) În condițiile proprietății private, pe piață se prezintă trei categorii de producători ai mărfii:
   a) prima categorie pune în circulație 70% din marfa respectivă, timpul individual de muncă fiind de 4,5 ore;
   b) a doua categorie pune în circulație 20% din marfa respectivă, timpul individual de muncă fiind de 6 ore;
   c) a treia categorie pune în circulație 10% din marfa respectivă, timpul individual de muncă fiind de 4 ore.
   Să se indice timpul de muncă socialmente necesar și să se motiveze soluția dată.
   4) Ce se înțelege prin rata acumulării?
   5) Definiți elementele care participă obligatoriu în orice proces de producție.

2. A. Acumularea socialistă și rata acumulării. Fondul național de dezvoltare economică și socială a României. Directivele Congresului al XI-lea al P.C.R. cu privire la raportul dintre fondul de consum și fondul de dezvoltare (acumulare).
   B. 1) Explicați funcția banilor ca măsură a valorii mărfurilor.
   2) Care sînt principalii factori care determină creșterea productivității muncii în socialism.
   3) Enumerați căile de creștere a nivelului de trai în R. S. România.
   4) Rolul legii valorii în diferențierea producătorilor de mărfuri și nașterea relațiilor capitaliste.
   5) Enumerați principalele obiective ale făuririi societății socialiste multilateral dezvoltate în R. S. România.

Comerț exterior

A. Societățile mixte de cooperare economică și tehnico-științifică.
B. 1) Definiți comerțul invizibil și enumerați componentele lui.
2) Clauzele națiunii celei mai favorizate.
3) Ce condiții trebuie să îndeplinească mesajul publicitar pentru a fi eficient?
4) Contractul de navlosire.

Circulația bănească, creditul și tehnică bancară

A. Tehnica de lucru și evidența privind decontarea prin dispoziția de plată.
B. 1) Felurile creditului pe termen scurt.
2) Creditarea documentelor în curs de încasare.
3) Care sînt serviciile din unitățile operative ale băncilor?
4) Cum sînt organizate și cum funcționează casele serale?

Contabilitate teoretică

A. Conturile de calculație a prețului de cost al producției de bază și auxiliare. Necesitatea, conținutul economic și funcția lor contabilă, (cu exemplificări cifrice de înregistrări în ordine cronologică, iar pentru conturile de calculație și în formă sistematică).
B. 1) Evaluarea materialelor și produselor finite în contabilitatea curentă și la bilanț.
2) Exemple de erori de înregistrare și calcul ce pot fi identificate cu ajutorul balanțelor de verificare.
3) În ce parte a bilanțului apare contul „Cont curent" și ce semnificație are ca post de bilanț?
4) Se aprovizionează de la furnizori obiecte de inventar de mică valoare sau de scurtă durată, preț de facturare: 10.000 lei; cheltuieli de transport — aprovizionare incluse în factură 800 lei. Obiectele se dau în folosința secțiilor auxiliare, uzura înregistrîndu-se integral la eliberare. După uzarea lor completă acestea se scot din funcțiune. Să se înregistreze în ordine cronologică operațiile de mai sus.

Merceologia produselor industriale

A. Lemnul: structură, proprietăți generale, semifabricate din lemn obișnuit și ameliorat.
B. Răspundeți pe scurt la următoarele întrebări:
1. Care sînt materiile prime utilizate la fabricarea sticlei?
2. Care este sortimentul de acid sulfuric?
3. Care este principiul de funcționare al frigiderelor cu compresie?
4. Care sînt zonele topografice ale pielei brute?

SEMINARII ŞTIINŢIFICE

În perioada care a trecut de la apariţia ultimului număr al revistei, în cadrul Laboratoarelor Catedrei de cibernetică economică s-au dezbătut următoarele teme:

Seminarul: *Modele şi metode de optimizare*

1. Modele ale programării operative a producţiei la C.O.S. Tîrgovişte (Gh. Ciobanu).
2. Aplicarea conceptelor splitoriale statistice în simularea fenomenelor economice (M. Stoica).
3. Studiul comparativ al unor metode de plan de secţiune în programarea neliniară (Cs. Fabian, R. Serban).
4. Modele de ordonanţare utilizind diverse funcţii obiectiv (M. Păun).
5. Idei noi în programarea neliniară (V. Dumitru).
6. Sistemul POP la Întreprinderea Electromagnetică (Gh. Boldur, C. Raţiu-Suciu, M. Stoica, C. Hartulari).

Seminarul: *Sisteme informatice cu aplicaţii în economie*

1. Prezentarea pachetului de programe „Lansare" (D. Chebeleu).
2. Compatibilitatea IBM-FELIX la nivelul de benzi (D. Somnea).
3. Sistemul de evidenţă automată a lucrărilor pe FELIX C-256 (D. Chira).
4. Gestiunea integrată a unei baze de sondaj (V. Bogdan, N. Mihăiţă).
5. Metodologia ICI privind analiza, proiectarea şi implementarea sistemelor informatice (I. Teodor, T. Surcel).
6. Metodologia OPSIE (M. Băcescu).
7. Structurarea informaţiei privind activitatea de elaborare a studiilor şi proiectelor în vederea creării unei baze de date în domeniul lucrărilor de îmbunătăţiri funciare şi gospodărire a apelor (M. Pencea, C. Ionescu).
8. Prezentarea pachetului SWITCH (I. Satran).

V. Pescaru, I. Catona, D. Duţă, Cr. Popescu, I. Satran

FIŞIERE, BAZE ŞI BĂNCI DE DATE

Editura tehnică, Bucureşti, 1976

Diversificarea şi creşterea continuă a complexităţii activităţii economico-sociale ca şi a proceselor informaţionale-decizionale, a dus la intensificarea preocupărilor pentru utilizarea din ce în ce mai mult a echipamentelor electronice de calcul capabile să prelucreze, să transmită şi să stocheze un volum imens de date. Sistemele informatice care se proiectează în diferitele sectoare de activitate ale economiei au ca principal obiectiv de a asigura o structură şi o calitate ridicată a informaţiei care se prelucrează, asigurînd datele necesare luării deciziilor la toate nivelurile de conducere.

Lucrarea pe care o prezentăm, urmăreşte să pună în evidenţă o serie de metode şi tehnici de proiectare, organizare şi exploatare a informaţiilor în sistemele de prelucrare electronică şi teleprelucrare care s-au impus prin eficienţa lor, fiind concepută astfel încît să constituie un instrument de lucru atît specialiştilor în domeniul perfecţionării sistemelor informaţionale complexe, analiştilor, proiectanţilor, programatorilor cît şi cadrelor didactice, cercetătorilor şi studenţilor din învăţămîntul superior.

Materialul deosebit de bogat şi valoros prezentat în acest volum, este bine organizat şi dă posibilitatea cititorului să abordeze cu uşurinţă toate tehnicile şi metodele unui domeniu important în prelucrarea electronică a informaţiei.

Astfel, în prima parte a lucrării sînt prezentate evoluţia metodelor şi tehnicilor de organizare a informaţiei, tehnicile generale de structurare a acesteia şi suporturile de înregistrare.

O parte însemnată a lucrării este rezervată prezentării metodelor şi tehnicilor de proiectare, organizare şi exploatare a informaţiilor organizate în fişiere şi bănci de date, printr-o abordare care se ridică la nivelul posibilităţilor pe care le oferă atît ca software, cît şi ca hardware, calculatoarele electronice contemporane.

Sînt prezentate de asemenea, sistemele standard de organizare şi gestiune a fişierelor integrate şi a băncilor de date BOMP, IMS, TOTAL, GIS, utilizabile pe calculatoarele IBM sau calculatoare compatibile cu acestea cum sînt, de exemplu, cele din sistemul de calculatoare ES şi sistemele standard SCF, SOFOCLE, SOCRATE utilizabile pe calculatoarele româneşti FELIX-C 256. Acolo unde a fost cazul s-au făcut şi referirile necesare la sistemul DBMS utilizat pe calculatoarele UNIVAC, utilizate în mod deosebit în realizarea unor reţele de teleprelucrare şi utilizării tehnicilor de fişiere şi bănci de date.

Analiza diferitelor sisteme este orientată ca o preocupare remarcabilă spre utilizarea aspectelor practice referitoare la alegerea și implementarea lor în sistemele informatice, lucrarea fiind marcată de numeroase exemple, de aplicații concrete.

Considerăm că prin apariția acestei cărți, semnată de un colectiv cu o bogată experiență practică în proiectarea, organizarea și utilizarea sistemelor informatice, inclusiv a băncilor de date, cu preocupări și rezultate însemnate în domeniul dezvoltării software privind organizarea și gestiunea fișierelor și băncilor de date, se acoperă o mare cerință a literaturii românești de specialitate. De asemenea, lucrarea prezintă un interes deosebit pentru cadrele didactice și studenții care urmează cursurile din specialitatea informatică și cibernetică cît și pentru cadrele din economie care se specializează atît ca lucrători în domeniul informaticii cît și ca utilizatori al calculatoarelor electronice pentru rezolvarea problemelor din diferite domenii de activitate.

ing. C. Bilciu

L. Tövissi, E. Țigănescu

ANALIZA ECONOMICĂ MULTISECTORIALĂ

Editura științifică și enciclopedică, București, 1976

Cu cîteva decenii în urmă, W. Leontief a elaborat metoda de analiză input-output, care a cunoscut o largă propagare în rîndurile cercetătorilor științifici din lumea întreagă. Sub o denumire sau alta, metoda s-a aplicat și continuă să se folosească în numeroase țări în funcție de condițiile concrete existente de la caz la caz. În țara noastră ea este cunoscută sub denumirea de balanță a legăturilor dintre ramuri. Pornindu-se de la abordarea sistemică a fenomenelor și proceselor economice naționale, autorii ajung la concluzia firească ca subsistemele în care se subdivide marele sistem al producției sociale să se numească „sectoare".

În primul capitol al lucrării, după ce se face o succintă abordare a trăsăturilor fundamentale ale sistemelor economice, se definește sistemul multisectorial al producției sociale și parametrii sistemului național de producție, cu care ocazie se prezintă foarte sugestiv conexiunile sistemului producției sociale și ideile directoare ale modelării economico-matematice a acestuia.

Analiza structurii economiei naționale formează obiectul celui de al doilea capitol. Aici, metodic, se procedează mai întîi la definirea componentelor modelului intrări-ieșiri, structura modelului, structura și proprietățile matricilor fundamentale ale modelelor intrări-ieșiri, ierarhizarea legăturilor dintre ramuri, analiza și sinteza balanțelor intrări-ieșiri. În mod special trebuie subliniată concepția și realizarea organizării sistemului de balanțe ale legăturilor dintre ramuri pe trei niveluri

decizionale, punîndu-se în evidență direcțiile de utilizare ale modelului intrări-ieșiri în analiza și calculul economic.

Autorii consacră un capitol (cel de al treilea) asigurării bazei de date pentru analiza dinamică, începînd mai întîi cu procedeele de predicție ale elementelor ce constituie matricea fluxurilor și matricea tehnologică A, parametri de bază în analiza multisectorială.

În cel de al patrulea capitol se face o prezentare generală a modelelor intrări-ieșiri dinamice. Cum e și firesc, o atenție deosebită se acordă variabilei timp în aceste modele, precum și conceptelor categoriilor și noțiunilor care intră în scenă. În acest cadru se tratează problema întîrzierii, accelerării și multiplicării în modelele de intrări-ieșiri dinamice.

În cel de al cincilea capitol autorii se opresc asupra cîtorva modele pe care le prezintă gradat, de la simplu la complex (modelul „inversa-dinamică", modelul intrări-ieșiri semidinamic al lui F. N. Kloțvog, modelul intrări-ieșiri dinamic al lui O. Lange, modelul dinamic cu întîrziere, modelul dinamic cu luarea în considerație a comerțului exterior etc.).

Deși s-a demonstrat că modelele dinamice de tip Leontief pot oferi o traiectorie Leontief, liberă și neîngrădită a evoluției sistemului, cum spun însăși autorii cărții, pentru a-și pune în valoare toate valențele este necesar să fie încadrate în modele de optimizare. Acesta este de fapt și obiectul celui de al șaselea capitol al lucrării intitulat „Metode de optimizare pe baza modelelor multisectoriale". Esențialmente, prin analiza dinamică se caută, pe plaja traiectoriilor admisibile, acea traiectorie care răspunde cel mai bine evoluției dorite a sistemului și permite descrierea proprietăților asociate acestei traiectorii.

Ultimul capitol al acestei valoroase cărți se ocupă cu elaborarea programului de producție. Pornindu-se de la ideea justă că valoarea gnoseologică a modelelor este anihilată dacă în prealabil nu se realizează prin intermediul datelor legătura între sistemul real și model, dacă izomorfismul dintre model și realitate nu se referă la conținutul datelor, se pune, înainte de toate, problema asigurării bazei de date. Apoi se prezintă calculul programului de producție pe baza modelului „inversa-dinamică", analiza ritmului de creștere a producției și abordarea sistemică în elaborarea programului de producție.

O înaltă ținută științifică, un limbaj clar și accesibil, o înlănțuire logică a problemelor abordate, o interpretare constructivă adusă continuu la parametrii condițiilor noastre, o aplicare strălucită a celor mai moderne metode de calcul și analiză, iată numai cîteva din remarcabilele valențe ale acestei binevenite lucrări, rod al îndelungatelor strădanii ale dascălilor și cercetătorilor științifici L. Tövissi și E. Tigănescu. Prin problematica abordată, prin soluțiile și discuțiile prezentate, această carte, fără îndoială, este un ajutor prețios în egală măsură statisticienilor și economiștilor în general, cadrelor didactice și studenților din învățămîntul economic, cercetătorilor științifici și, poate în primul rînd, celor pe ai căror umeri stă responsabilitatea muncii de conducere a marilor sisteme din spațiul nostru economic.

Dr. Gh. Nistorescu

T. Baron

CALITATEA ŞI FIABILITATEA PRODUSELOR

Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976

Calitatea şi fiabilitatea produselor constituie o problemă centrală a politicii economice a statului nostru. Astăzi în contextul unor transformări profunde pe toate planurile şi în toate domeniile vieţii social economice, creşterea calităţii produselor, obţinerea de produse noi cu parametrii calitativ superiori şi competitive pe plan mondial, devine o sarcină centrală a tuturor ramurilor economiei naţionale.

Acest lucru a determinat acordarea unei atenţii sporite disciplinei de „Calitatea şi fiabilitatea produselor" în învăţămîntul superior economic.

Lucrarea de faţă vine să răspundă acestor sarcini de maximă importanţă în pregătirea viitorilor economişti, iar autorul ei a găsit prilejul să valorifice vasta sa experienţă şi preocupările sale în domeniul calităţii şi fiabilităţii produselor încă de pe vremea cînd era student în ultimii ani de facultate.

Cartea elaborată astfel încît să constituie cursul tipărit pentru studenţii de la facultatea de Cibernetică economică şi statistică, prin modul cum a fost realizată se adresează deopotrivă tuturor celor ce se interesează de problema calităţii şi fiabilităţii produselor, fie ei cercetători sau utilizatori direcţi ai acestor concepte.

Capitolul 1 abordează problema generală a calităţii produselor şi de măsurare a calităţii, subliniindu-se în mod deosebit problema ridicării calităţii produselor — obiectiv central al politicii economice.

În capitolul 2 se tratează problema asigurării şi controlul calităţii produselor ca problematică generală, subliniindu-se rolul factorului uman în această direcţie, care este concepţia modernă a controlului de calitate, sistemul de control al calităţii produselor în ţara noastră, sistemul de evidenţă folosit în domeniul calităţii produselor.

Capitolul 3 se referă la un aspect deosebit de important şi anume la implicaţiile economice ale îmbunătăţirii calităţii produselor subliniindu-se raportul dintre calitate şi productivitatea muncii sociale.

Capitolul 4 tratează analiza desfăşurării procesului de producţie, indispensabilă alegerii şi aplicării unor metode concrete de control al calităţii, fie el pe fluxul de fabricaţie sau de recepţie. Ca atare pornind de la noţiunile de cîmp de împrăştiere şi cîmp de toleranţă sînt tratate metode de sondaj de volum mare sau de volum redus, criterii de verificare a caracterului aleator al observaţiilor sau de concordanţă a repartiţiei empirice cu cea teoretică cu scopul bine precizat de a fi utilizate în metode concrete de control.

Capitolul 5 cuprinde metodele clasice de control în curs de fabricaţie inclusiv metoda calibrelor.

Capitolul 6 este un capitol pregătitor al capitolului următor, dat fiind faptul că sînt date noţiuni de bază de planificare a experimentelor

în scopul determinării parametrilor optimi ai procesului tehnologic folosindu-se metoda pantei celei mai înclinate și metoda operației evoluționare.

În capitolul 7 autorul se ocupă de controlul produselor ce intră în circuitul economic prin metode specifice ale statisticii matematice, dat fiind caracterul aleator al fenomenului investigat. De aceea se precizează chiar de la început că este vorba de un control prin sondaj ca metodă de recepție, urmînd apoi să fie studiate metode de control pe bază de atribute sau pe bază de măsurători cu decizii de acceptare sau respingere pe baza unui sondaj simplu sau multiplu. Tot aici sînt prezentate și metode secvențiale trunchiate sau nu, cu indicații precise asupra modalității concrete de stabilire a planurilor de control.

În ultimul capitol sînt abordate probleme privind fiabilitatea produselor industriale așa cum sînt ele formulate de practica industrială, reușind să se pună la dispoziția cititorului un minim de cunoștințe teoretice care să-i dea posibilitatea apoi să rezolve efectiv probleme concrete.

Întregul material prezentat în această lucrare este bine selectat și prezentat într-o formă riguros științifică și în același timp accesibilă și acelora care au mai puține cunoștințe de teoria probabilităților sau statistică matematică. Deși nu sînt date demonstrații pentru metodele prezentate, explicațiile bine făcute și multiplele exemple concrete dau posibilitatea unei foarte bune înțelegeri a materialului prezentat și acest fapt vine să ridice nivelul acestei lucrări.

I. Săcuiu

CONTENS

C. V. NEGOIȚĂ, P. FLONDOR, M. SULARIA

On Optimization Under Fuzzy Conditions 3

G. THEILER, L. TÖVISSI

Initial Distributions Corresponding to Limit Laws of Extremal Values 15

C. BARON

Structure Functions and Fiability Networks 39

G. BOLDUR, C. RATIU SUCIU, M. STOICA, C. HARTULARI

Static and Dynamic Aspects of the Problem of Establishing the Manufacture Rate 51

C. HÂRTU

Simulation of an Economic Growth Model with Random Parameters 61

I. VĂDUVA, V. BALTAC, V. FLORESCU, I. FLORICICĂ

Programming Activity Rationalization 75

Scientific Information

Critique and Bibliography

SOMMAIRE

C. V. NEGOITA, P. FLONDOR, M. SULARIA

De l'optimisation dans les conditions fuzzy 3

G. THEILER, L. TÖVISSI

Répartitions initiales correspondant aux lois-limite des valeurs extrémales 15

C. BARON

Fonctions de structure et réseaux de fiabilité 39

GH. BOLDUR, C. RAȚIU-SUCIU, M. STOICA, C. HARTULARI

Aspects statiques et dynamiques du problème de la détermination du rythme de fabrication 51

C. HÂRTU

Simulation d'un modèle de croissance économique ayant des paramètres aléatoires 61

I. VADUVA, V. BALTAC, V. FLORESCO, I. FLORICICA

La rationalisation de l'activité de programmation 75

Informations scientifiques

Critique et bibliographie

СОДЕРЖАНИЕ

К. В. НЕГОИЦЭ, П. ФЛОНДОР, М. СУЛАРИА

Относительно оптимизации при условим „fuzzy“ 3

Г. ТАИЛЕР, Л. ТЁВИШИ

Законы-пределы экстремальных значений 15

К. БАРОН

Структурные функции и цепи надёжности 39

Г. БОЛДУР, К. РАЦ Ю-СУЧУ, М. СТОИКА, К. ХАРТУЛАРИ

Статические и динамические аспекты проблемы установления темпа фабрикации 51

К. ХЫРТУ

Симмулирование по одной модели экономического роста с вероятностными параметрами 61

И. ВЭДУВА, В. БАЛТАК, В. ФЛОРЕСКУ, И. ФЛОРИЧКЭ

Рационализация программирования 75

Научная информация

Критика и библиография

SUMARUL SUMARELOR

	Nr.	Pag.
C. V. NEGOIȚA, M. SULARIA *Programarea matematică fuzzy și toleranțele în planificare*	1	3
GH. CIOBANU *Aplicarea simulării digitale la rezolvarea problemelor de programare liniară cu mai multe funcții obiectiv*	1	15
ILEANA POPESCU *Algoritmi pentru generarea variabilei logistice*	1	21
DRAGOMIRA BAZ *Metode de control statistic preventiv prin penalizări. Fișe de control*	1	27
I. M. STANCU MINASIAN *Analiza unor puncte de vedere în programarea matematică cu mai multe funcții obiectiv*	1	37
E. PECICAN *Programul SEREP pentru analiza seriilor dinamice în vederea elaborării de prognoze*	1	49
GEORGIA HERA, ARGENTINA FILIP *Asupra unui model de așteptare pentru un sistem de calcul cu timpi divizați*	1	63
D. PASCU, D. CHEBELEU, I. LUNGU *Pachetul de programe pentru planificarea și programarea operativă a producției CLASS* (I)	1	67
V. PESCARU, V. MIERLEA *Model de planificare optimă a producției în prelucrarea țițeiului*	2	3
M. STOICA, C. RAȚIU SUCIU, D. CHIRA, I. DOBRE *Simularea proceselor stohastice de stocare*	2	11
M. NEMȚEANU *Model de simulare a variației stocurilor și consumurilor în construcții*	2	25
G. DIACONESCU *Principii de organizare și creare a unei baze de date statistice*	2	39
H. W. GOTTINGER *Structuri informaționale în probleme dinamice de decizie colectivă*	2	45
D. PASCU, D. CHELEU, I. LUNGU *Pachetul de programe pentru planificarea și programarea operativă a producției — CLASS* (II)	2	65
M. MAGDA, M. PENCEA *Utilizarea fișierelor inverse*	2	73
MANEA MĂNESCU *România deceniului opt*	3	7
C. IONESCU *Preocupări privind activitatea de prognoză economico-socială în țara noastră*	3	29
M. BULGARU *Mecanismul relației dintre populație și dezvoltare economică*	3	41
V. PESCARU *Organizarea informației pentru sistemele de prelucrare automată*	3	51
ED. NICOLAU *Modele cibernetice de dezvoltare economică*	3	59
M. ALTAR *Principiul maximului pentru sisteme de comandă discrete cu întîrzieri*	3	69
P. CONSTANTINESCU, GH. PĂUN *Sistemul informatic ca sistem cibernetic cu două bucle de reglaj*	3	79
C. V. NEGOIȚĂ, ST. MINOIU, E. STAN *Asupra considerării impreciziei în programarea liniară dinamică*	3	93
VL. TREBICI *Modele matematice în demografie*	4	5

	Nr.	Pag.
I. VĂDUVA *Generarea cu calculatorul a variabilelor aleatoare și a vectorilor aleatori folosiți în teoria siguranței*	4	15
U. BERAR, D. FUSARU, V. IONESCU *Metode moderne de calcul în proiectarea nivelării și modelării terenurilor irigabile pe brazde*	4	25
CS. FABIAN *Algoritmi de programare întreagă neliniară*	4	37
G. THEILER, L. TÖVISSI *Legi limită pentru valori extremale, repartiția Weibull și unele probleme statistice ale analizei controlului global*	4	43
I. DAVIDOVICI, A. MIHĂILESCU, V. BOGDAN *Optimizarea dotării cu tehnică agricolă și a utilizării acesteia în cadrul unui centru teritorial de chimizare*	4	65
C. HARTULARI *Aspecte și metode ale problemei ordonanțării în flux*	4	73
D. PASCU, D. CHEBELEU, I. LUNGU *Programarea operativă a producției, o problemă complexă*	4	87

549577 OCT 2 1

Lei 15

F 29921

CATEDRA DE CIBERNETICĂ ECONOMICĂ
ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE
BUCUREŞTI

STUDII ŞI CERCETĂRI DE CALCUL ECONOMIC ŞI CIBERNETICĂ ECONOMICĂ

2

1977

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

CATEDRA DE CIBERNETICĂ ECONOMICĂ
ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE
BUCUREŞTI

STUDII ŞI CERCETĂRI DE CALCUL ECONOMIC ŞI CIBERNETICĂ ECONOMICĂ

2 1977

Calea Dorobanţilor 15—17
Tel. 12.77.08

SUMAR

C. BILCIU, G. DIACONESCU, M. MAGDA, C. IONESCU, O. ȘĂRBAN
Banca de date statistice pentru conducerea învățământului.. 3

R. STROE
Intercorelarea prognoză-planificare în profil teritorial..... 13

GH. BOLDUR-LĂȚESCU
Considerații asupra integrării disciplinelor decizionale.... 27

N. VIȘINOIU
Variația și entropia — criterii de optim într-o problemă de transport cu ponderi 31

GEORGIA HERA, ARGENTINA FILIP
Model de așteptare cu intensități diferite de servire..... 41

AL. ISAIC MANIU, V. BĂDIN
Metodă statistică de verificare a omogenității loturilor de produse 47

C. NICODA, V. CARNAZIU
Studierea utilizării timpului de lucru de către muncitorii unei întreprinderi industriale 59

GH. PESCARU, GH. BĂRBATU, V. IONESCU
Metode de determinare a indicelui de vîscozitate cu ajutorul corelației multiple 67

S. GRINDEA, JUDITA SAMUEL
Un model de creștere economică cu funcție scop depinzînd explicit de nivelul fondurilor de producție..... 73

În ajutorul celor ce doresc să susțină examenul de admitere în facultățile A.S.E.

Critică și bibliografie

C. BÎLCIU
G. DIACONESCU
M. MAGDA
C. IONESCU
O. ŞĂRBAN

Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

Banca de date statistice pentru conducerea învăţămîntului

În lucrările [3] *şi* [6] *sînt descrise atît aspectele tehnice ale proiectării cît şi noua metodă de inversare pe caractere a fişierelor.*

Articolul de faţă abordează problemele generale ale proiectării, implementării şi dezvoltării unui sistem informatic pentru Ministerul educaţiei şi învăţămîntului, bazat pe utilizarea bazelor de date statistice. Se accentuează de asemenea, implicaţiile muncii organizatorice în vederea realizării unui obiectiv atît de important ca acela al sistemului informatic necesar pentru conducerea unui minister.

Dezvoltarea tot mai impetuoasă a economiei naţionale, realizarea obiectivelor societăţii socialiste multilateral dezvoltate impun învăţămîntului de toate gradele sarcini precise, deosebit de complexe şi într-o dinamică continuu ascendentă, privind pregătirea forţei de muncă din toate domeniile de activitate. Complexitatea conducerii activităţilor din cadrul învăţămîntului la toate nivelele se manifestă din ce în ce mai mult pe plan calitativ, depăşind problemele puse de aspectele cantitative deosebit de semnificative prin ele însele. Această complexitate nu trebuie considerată global, ci în mod specific fiecărei etape de dezvoltare şi fiecărei ramuri a economiei naţionale, impunîndu-se din ce în ce mai mult necesitatea unor corelări ştiinţifice şi de detaliu între necesităţile forţei de muncă în economie şi pregătirea forţei de muncă prin procesul de învăţămînt, care cuprinde într-o formă sau alta aproape un sfert din populaţia întregii ţări. Astfel, milioane de elevi şi studenţi, cîteva sute de mii de cadre didactice de toate gradele, zeci de mii de unităţi şcolare, mergînd de la grădiniţe pînă la universităţi, dau doar o imagine cantitativă asupra problemelor complexe ale conducerii învăţămîntului din ţara noastră. Nevoile presante de a cunoaşte în fiecare moment, la nivelul întregului sistem de învăţămînt, aspectele reale şi problemele de fond care

rezultă din multitudinea activităţilor, din modificările de detaliu care apar continuu sau periodic la nivelul de bază privind utilizarea cadrelor didactice, a bazei materiale a învăţământului, a încadrării elevilor şi studenţilor în sistemul de învăţământ etc., impun utilizarea unor mijloace şi tehnici moderne de conducere, a tehnicilor informatice de analiză, culegere şi prelucrare a informaţiei şi obţinerea unor informaţii sintetice care să permită luarea deciziilor.

Introducerea unui sistem informatic de conducere a învăţământului va putea permite elaborarea riguroasă, pe baza evaluărilor cantitative tot mai precise, a planurilor de dezvoltare şi a prognozelor pe termen lung privind învăţământul din ţara noastră (fig. 1).

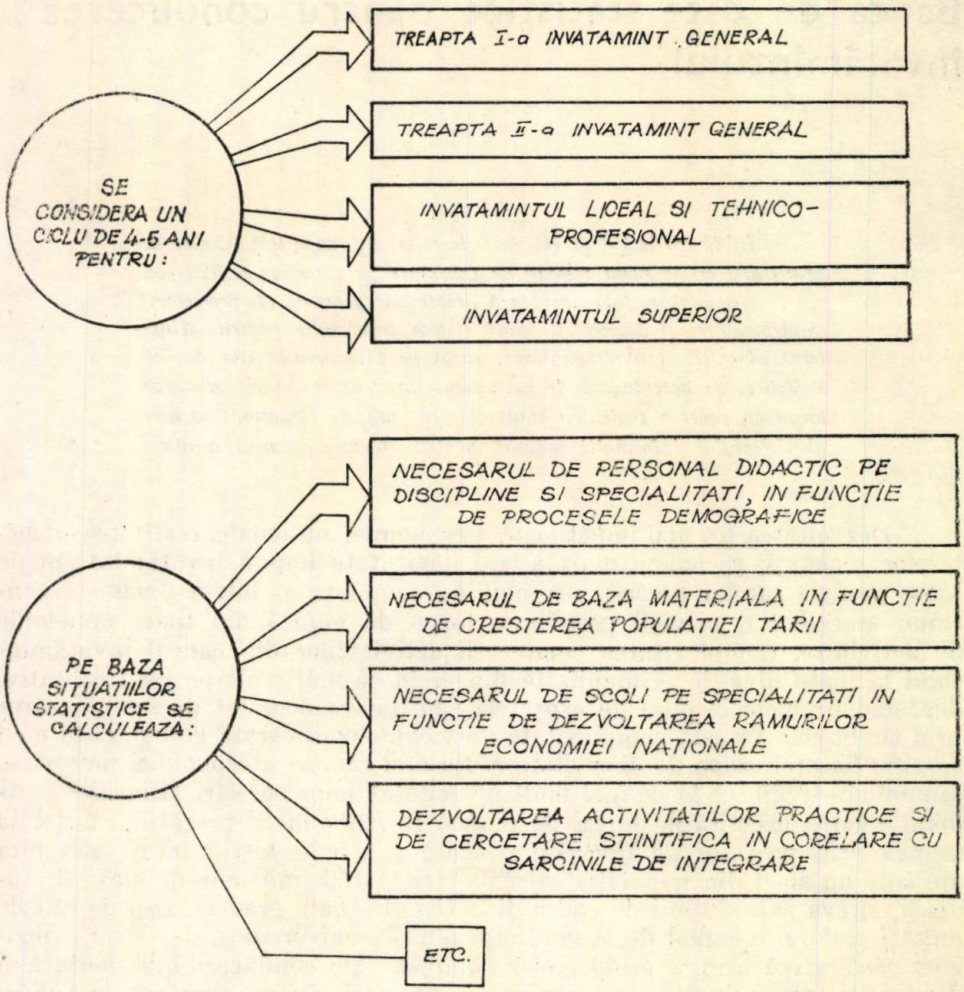

SE CONSIDERA UN CICLU DE 4-5 ANI PENTRU:
TREAPTA I-a INVATAMINT GENERAL
TREAPTA II-a INVATAMINT GENERAL
INVATAMINTUL LICEAL SI TEHNICO-PROFESIONAL
INVATAMINTUL SUPERIOR
PE BAZA SITUATIILOR STATISTICE SE CALCULEAZA:
NECESARUL DE PERSONAL DIDACTIC PE DISCIPLINE SI SPECIALITATI, IN FUNCTIE DE PROCESELE DEMOGRAFICE
NECESARUL DE BAZA MATERIALA IN FUNCTIE DE CRESTEREA POPULATIEI TARII
NECESARUL DE SCOLI PE SPECIALITATI IN FUNCTIE DE DEZVOLTAREA RAMURILOR ECONOMIEI NATIONALE
DEZVOLTAREA ACTIVITATILOR PRACTICE SI DE CERCETARE STIINTIFICA IN CORELARE CU SARCINILE DE INTEGRARE
ETC.

Fig. 1. *Prognoze pentru învăţământ.*

De asemenea, deciziile curente în activitatea de conducere a învățământului se pot fundamenta mai coerent, cu ajutorul metodelor informatice de analiză și prelucrare a informației, prin considerarea simultană a corelației dintre o multitudine de factori cantitativi și calitativi, uneori imposibil de urmărit într-un sistem manual de prelucrare a informațiilor, datorită necesităților imense de prelucrare a informației rezultată din această corelare.

Legată de aspectul de mai sus, intervine problema operativității luării deciziilor și a îmbunătățirii calității acestora, problemă care, în condițiile sistemului actual bazat în cea mai mare parte pe prelucrarea manuală a informațiilor, devine tot mai greu de rezolvat.

Sistemul informatic pentru învățămînt, în condițiile expuse mai sus, devine o necesitate de actualitate și o cerință a conducerii, exprimată de altfel și prin unele acțiuni privind înființarea unor unități de prelucrare automată a datelor în instituțiile de învățămînt superior și de elaborarea unor sisteme informatice pentru nevoile conducerii activității din învățămînt.

Printre obiectivele realizării unui sistem informatic de conducere a procesului de învățămînt din țara noastră sînt: etapizarea corectă a sarcinilor, stabilirea priorităților de urmărit, în corelație strînsă cu resursele disponibile și cu restricțiile tehnice și organizatorice impuse de volumul deosebit de mare al activității de elaborare a proiectului de implementare, experimentare și generalizare a sistemului (fig. 2).

Fiind realizată o primă etapă și anume formularea unei concepții de ansamblu asupra cerințelor și dezvoltării sistemului, în cele ce urmează vom prezenta, pe scurt, principalele etape ale realizării și utilizării sistemului informatic pentru conducerea învățămîntului.

A) Constituirea băncii de date

Realizarea unei bănci de date conține obiective deosebit de complexe, atît sub aspect tehnic cît și sub aspect organizatoric, incluzînd două subetape principale.

1. *Realizarea bazei de date statistice a întregului personal didactic din țară (circa 250.000 persoane) prin înmatricularea permanentă a fiecărui cadru didactic la calculatorul electronic și actualizarea periodică și la cerere a datelor culese inițial.* Acestea vor trebui să conțină informații privind: date civile, pregătirea profesională, activitatea didactică și științifică, activitatea de perfecționare, activitatea politico-socială ș.a.m.d., în total aproximativ 140 de caracteristici. Baza de date poate fi interogată convențional, cu timpi de răspuns la nivelul secundelor după oricare din cele 140 caracteristici, inclusiv după intervalele de grupare. Interogările respective pot cere fie numărul de persoane ce satisfac unele caracteristici, fie lista de persoane ce corespund unor caracteristici, cu posibilitatea efectuării la solicitare a unor combinări complexe a caracteristicilor de interogare, cererea complexă putînd fi formulată spontan. Implementarea bazată pe pachetul software MUSCEL (*M*atricol *U*nificat *S*tabil la *C*alculatorul *E*lectronic) pentru baze de date statistice, elaborat după o concepție în întregime originală în cadrul Laboratoarelor Catedrei de cibernetică economică din A.S.E., s-a realizat cu rezultate bune, în mod experimental pentru cadrele didactice din județul Timiș

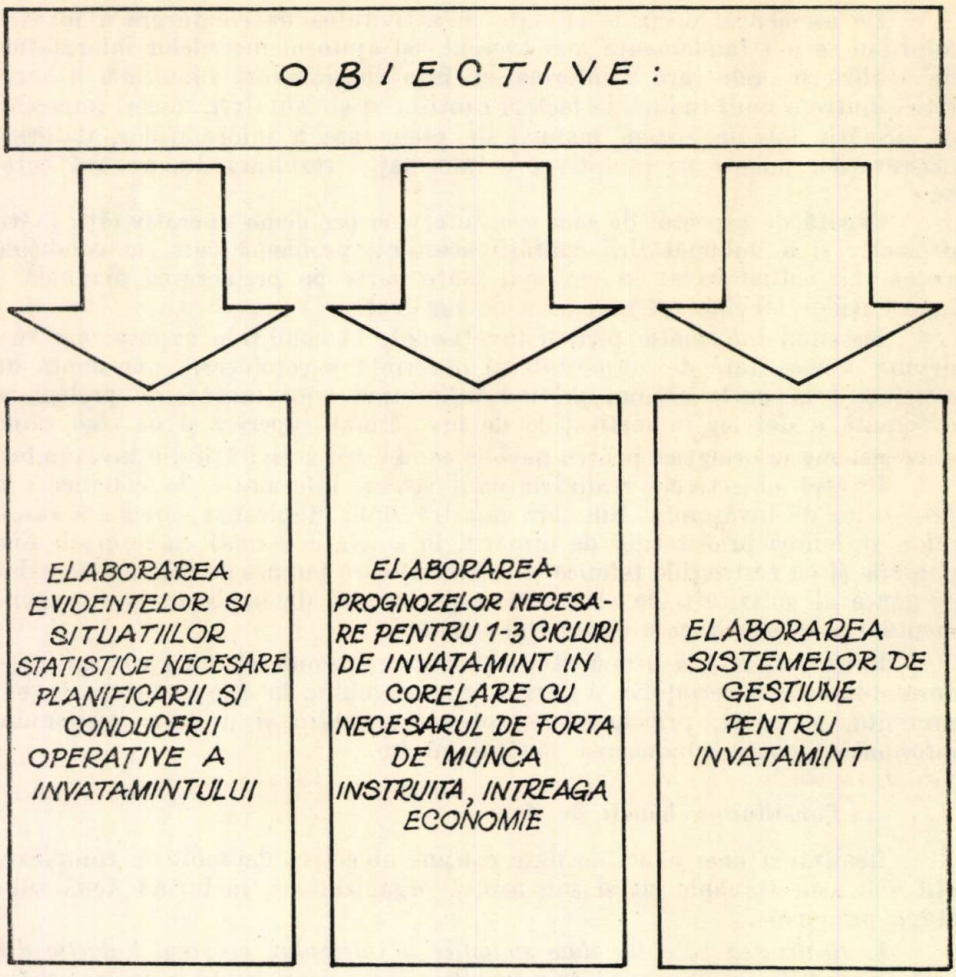

OBIECTIVE:
ELABORAREA EVIDENTELOR SI SITUATIILOR STATISTICE NECESARE PLANIFICARII SI CONDUCERII OPERATIVE A INVATAMINTULUI
ELABORAREA PROGNOZELOR NECESARE PENTRU 1-3 CICLURI DE INVATAMINT IN CORELARE CU NECESARUL DE FORTA DE MUNCA INSTRUITA, INTREAGA ECONOMIE
ELABORAREA SISTEMELOR DE GESTIUNE PENTRU INVATAMINT

Fig. 2. *Sistemul informatic pentru învățămînt.*

și se va continua în etapa viitoare la nivelul întregii țări implicînd un deosebit efort tehnic și organizatoric (fig. 3).

Acest subsistem va permite o cunoaștere de detaliu a problemelor complexe puse de personalul didactic de toate tipurile de învățămînt din țara noastră.

2. *Crearea unei baze de date statistice a tuturor unităților de învățămînt din țară.* Fiecare unitate de școlarizare va fi descrisă cît mai complet cu ajutorul a zeci de caracteristici privind capacitatea de școlarizare, gradul de încadrare cu cadre didactice de diverse profile, date privind sălile de clasă etc. Se va utiliza același pachet software generalizat pentru interogarea și întreținerea bazelor de date statistice, pachetul descris mai sus, cele două componente (mari fișiere, în fapt) fiind în mod firesc intercorelate.

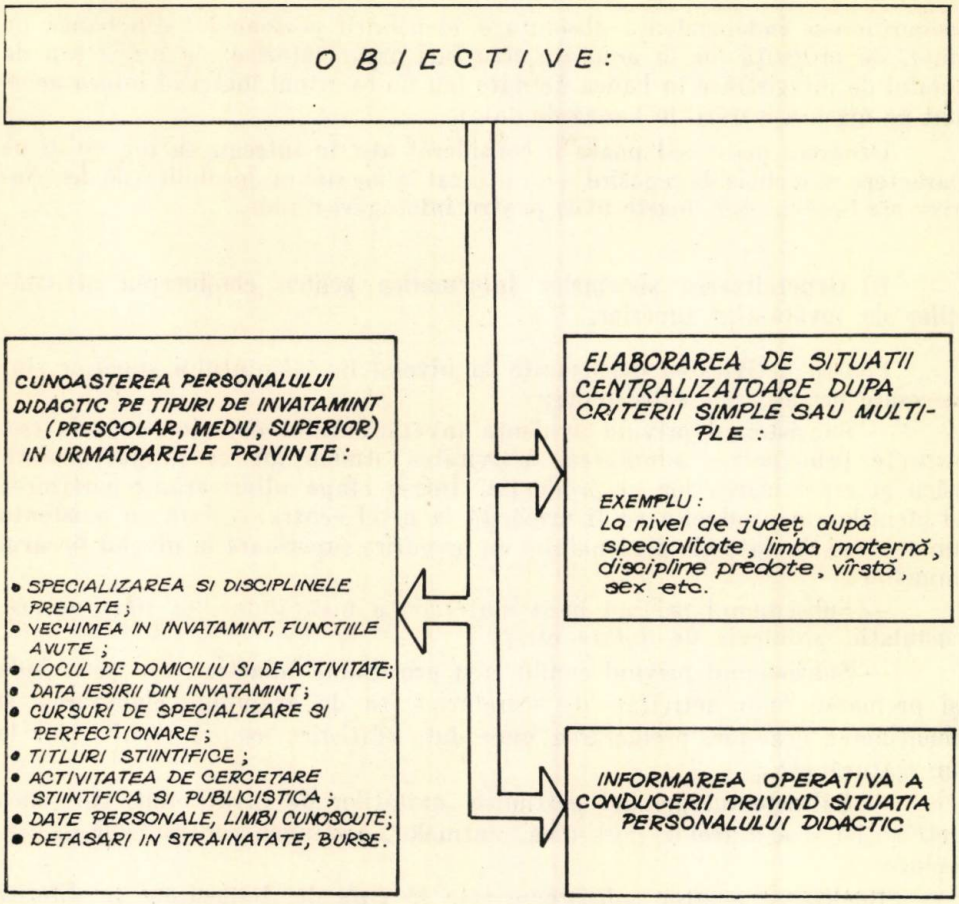

OBIECTIVE:
CUNOASTEREA PERSONALULUI DIDACTIC PE TIPURI DE INVATAMINT (PRESCOLAR, MEDIU, SUPERIOR) IN URMATOARELE PRIVINTE:
• SPECIALIZAREA SI DISCIPLINELE PREDATE;
• VECHIMEA IN INVATAMINT, FUNCTIILE AVUTE;
• LOCUL DE DOMICILIU SI DE ACTIVITATE;
• DATA IESIRII DIN INVATAMINT;
• CURSURI DE SPECIALIZARE SI PERFECTIONARE;
• TITLURI STIINTIFICE;
• ACTIVITATEA DE CERCETARE STIINTIFICA SI PUBLICISTICA;
• DATE PERSONALE, LIMBI CUNOSCUTE;
• DETASARI IN STRAINATATE, BURSE.
ELABORAREA DE SITUATII CENTRALIZATOARE DUPA CRITERII SIMPLE SAU MULTIPLE:
EXEMPLU:
La nivel de județ după specialitate, limba maternă, discipline predate, vîrstă, sex etc.
INFORMAREA OPERATIVA A CONDUCERII PRIVIND SITUATIA PERSONALULUI DIDACTIC

Fig. 3. *Sistemul pentru evidența personalului didactic.*

În cadrul băncii de date pentru conducerea ministerului apar desigur și alte componente esențiale precum nomenclaturile de specialități didactice și alte nomenclaturi, datele privind cifrele de planificare ș.a.m.d.

De o importanță deosebită în implementarea acestei bănci de date este utilizarea judicioasă a tehnicilor de codificare a datelor în vederea utilizării eficiente a spațiului de memorare, precum și a procedeelor de regăsire. În mod consecvent se utilizează codificarea alfanumerică descriptivă stabilă, facilitată la maximum de software-ul preconizat, care permite regăsirea directă la nivel de caracter (de tipul vizibil în exemplul cererii: toate persoanele cu a treia literă „M" în nume!).

Pentru codul persoanei se utilizează combinația

— data nașterii
— sexul
— grupa sanguină
— ultimele două cifre din numărul dat la registrul de naștere,

asigurîndu-se independența absolută a identității persoanelor din banca de date, de prezența lor în anumite structuri organizatorice, de nume sau de modul de înregistrare în banca de date (cu un eventual matricol intern acordat pe măsura intrării în banca de date).

Deoarece orice cod poate fi considerat atît în întregimea lui, cît și pe caractere ca o cheie de regăsire, s-au utilizat la maximum posibilitățile descriptive ale fiecărui cod, foarte utile pentru interogări rapide.

B) **Generalizarea sistemelor informatice pentru conducerea activităților de învățămînt superior.**

Pentru activitatea desfășurată la nivelul învățămîntului superior sînt necesare următoarele subsisteme:

— Subsistemul privind evidența învățămîntului superior cu cele trei aspecte principale — admiterea, activitatea studenților în timpul școlarizării și repartizarea lor în producție. Într-o etapă ulterioară, repartizarea studenților în producție va fi urmărită la nivel central o dată cu existența unor bănci de date ale personalului cu pregătire superioară la nivelul fiecărui minister;

— Subsistemul privind baza materială a învățămîntului (laboratoare, instalații, probleme de dotare etc.);

— Subsistemul privind conducerea procesului didactic care va include și preluarea unor activități de secretariat, ca de exemplu, elaborarea și menținerea orarelor, prelucrarea unor date statistice asupra rezultatelor la învățătură etc.;

— Subsistemul privind gestiunea unităților de învățămînt, gestiunea retribuției și a burselor, gestiunea cantinelor, gestiunea contractelor de cercetare.

Realizarea acestor subsisteme este în curs de desfășurare în diferite unități de învățămînt superior cu implementări pilot în centrele universitare din București, Timișoara, Iași și altele, urmînd să se treacă la finalizarea unitară și coordonată a aplicațiilor realizate.

Utilizarea bazei de date statistice este indicată, îndeosebi, în cadrul evidenței studenților, iar intercorelarea tuturor fișierelor implicate în conducerea unităților de învățămînt superior este necesară în cadrul unei baze de date a fiecărei unități.

C) **Utilizarea modelelor matematice pentru exploatarea optimă a băncii de date.**

Această etapă este în fază de proiectare și va fi pe deplin abordabilă abia după implementarea completă a băncii de date pentru conducerea învățămîntului, așa încît exploatarea optimă a băncii de date să fie precedată de o exploatare curentă și intensivă în scopul culegerii informațiilor semnificative pentru construcția modelelor.

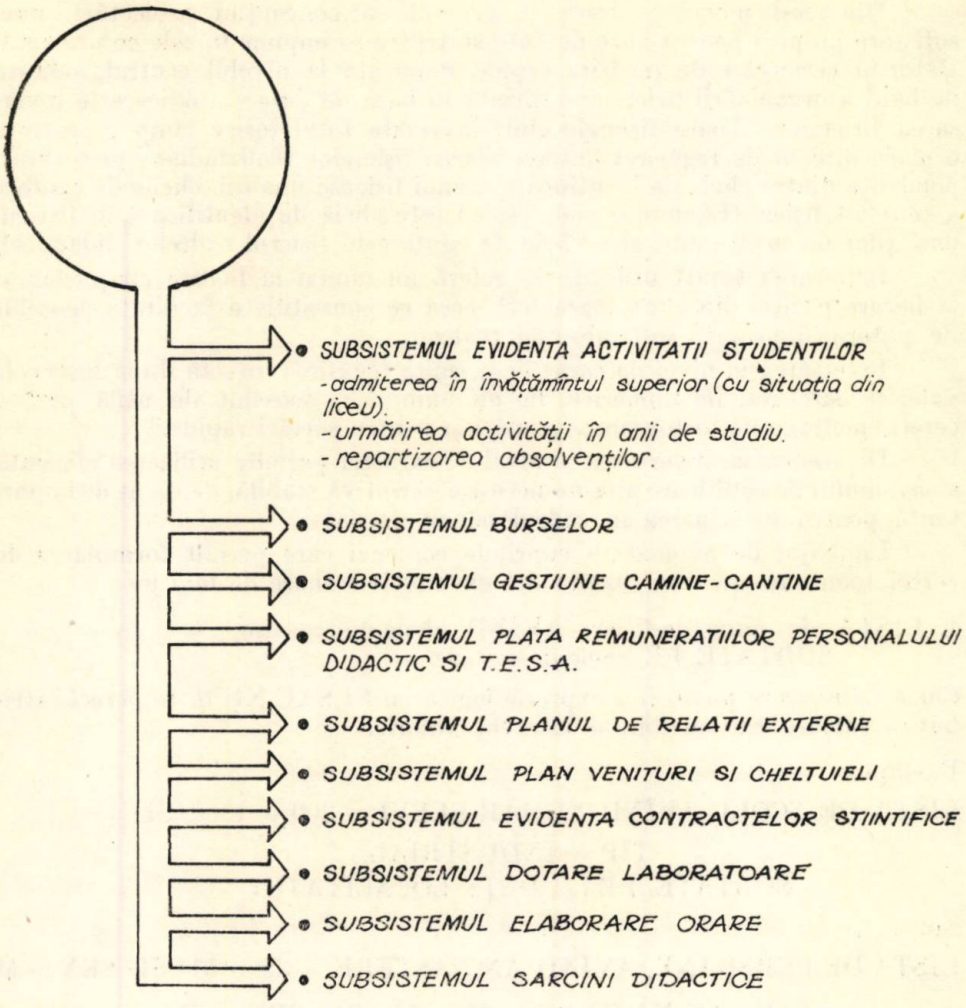

SUBSISTEMUL EVIDENTA ACTIVITATII STUDENTILOR
-admiterea în învățământul superior (cu situația din liceu).
-urmărirea activității în anii de studiu.
-repartizarea absolvenților.
SUBSISTEMUL BURSELOR
SUBSISTEMUL GESTIUNE CAMINE-CANTINE
SUBSISTEMUL PLATA REMUNERATIILOR PERSONALULUI DIDACTIC SI T.E.S.A.
SUBSISTEMUL PLANUL DE RELATII EXTERNE
SUBSISTEMUL PLAN VENITURI SI CHELTUIELI
SUBSISTEMUL EVIDENTA CONTRACTELOR STIINTIFICE
SUBSISTEMUL DOTARE LABORATOARE
SUBSISTEMUL ELABORARE ORARE
SUBSISTEMUL SARCINI DIDACTICE

Fig. 4. *Sisteme de gestiune pentru învățământ.*

D) **Aplicarea unor sisteme informatice.**

Dată fiind complexitatea și volumul mare de date, această etapă constituie pentru conducerea învățământului mediu, la nivelul inspectoratelor județene, în special privind evidența elevilor, o perspectivă mai îndepărtată.

Din descrierea sumară a concepției generale a sistemului informatic pentru conducerea învățământului, așa cum a apărut mai sus, se desprind trei idei principale:

— axarea sistemului pe baze de date statistice de concepție proprie;
— implementarea sistemului de „sus în jos";
— utilizarea intensivă la nivel central și teritorial (județean) a băncii de date statistice pentru conducerea învățământului.

Din acest motiv o descriere generală a concepției proiectării unui software propriu pentru baze de date statistice se impune în cele ce urmează. Datorită cerințelor de regăsire rapidă implicate la nivelul central, tehnica de bază a organizării fișierelor utilizată în baza de date statistice este inversarea fișierelor. Toate fișierele sînt inversate total (orice cîmp reprezintă o cheie directă de regăsire), intercorelarea fișierelor realizîndu-se prin corespondența dintre cheia de identificare a unui fișier și una din cheile de căutare a celuilalt fișier. (Exemplu: codul școlii este cheia de identificare în fișierul unităților de învățămînt și o cheie de căutare în fișierul cadrelor didactice).

Inversarea totală utilizată se referă nu numai la fiecare cîmp, dar și la fiecare poziție din cîmp (caracter), ceea ce constituie o facilitate deosebit de puternică proprie software-ului realizat.

Inversarea la nivel de caracter permite regăsirea directă după intervale valorice oarecare, fie numerice, fie alfanumerice, deosebit de utilă pentru cereri spontane de histograme, grupări și pentru sortări rapide.

De asemenea, inversarea la nivel de caracter permite utilizarea eficientă a sistemului de codificare alfa-numerică descriptivă stabilă, deosebit de importantă pentru menținerea în cadrul băncii de date.

Limbajul de exploatare cuprinde comenzi care permit formularea de cereri spontane așa cum rezultă din exemplele sumare de mai jos:

1. LISTA de nume-de-fișier, AVÎND cheie-de-regăsire,
SORTATE PE cheie-de-sortare

Cheia de regăsire poate fi o expresie logică cu SI SAU NU între perechi atribut = valoare sau atribut = interval valoric.

Exemplu:

LISTA DE SCOLI, AVÎND NUMĂR-ELEVI = 200 — 1580 · SI ·
TIP = INDUSTRIAL,
SORTATE PE JUDEȚ; LOCALITATE?

sau

LISTA DE PERSOANE, AVÎND AN-NAȘTERE = 38 — 51 · SI · SEX = M
· SAU · AN-NAȘTERE = 42 — 51 · SI · SEX = F,
SORTATE PE LOC-MUNCĂ?

etc.

2. NUMĂRUL DE nume-de-fișier, AVÎND ...

3. DISTRIBUȚIA DE nume-de-fișier, AVÎND ... DUPĂ

Exemplu:

DISTRIBUȚIA DE PERSOANE, AVÎND SEX=F, DUPĂ RETRIBUȚIE

sau

DISTRIBUȚIA DE PERSOANE, AVÎND FUNCȚIA=DIRECTOR,
DUPĂ AN-NAȘTERE cu apariția în cîteva secunde a histogramei respective.

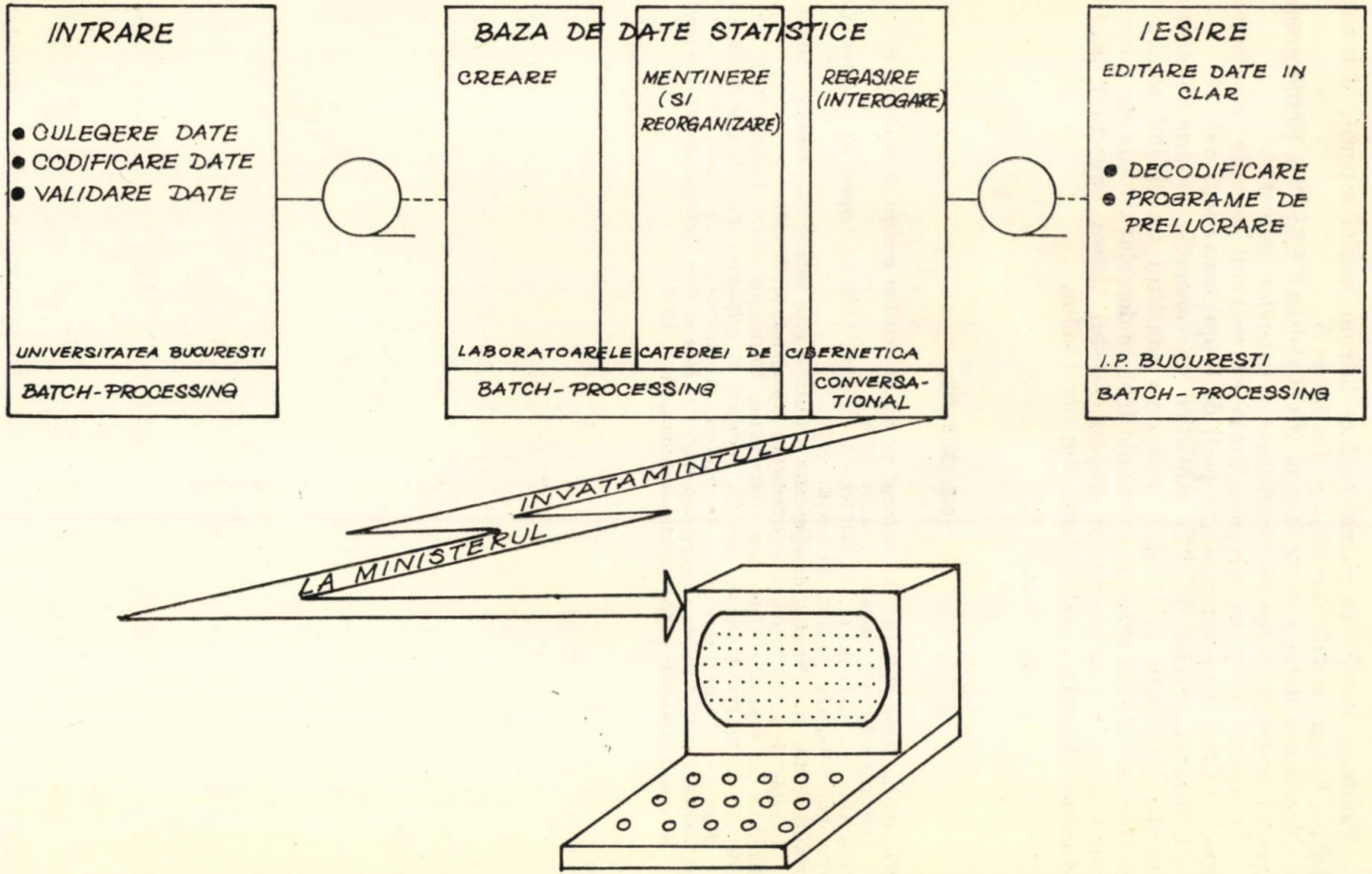


Fig. 5. *Funcțiile bazei de date statistice a personalului didactic*

Validarea datelor în sistem se face într-un modul separat, structura globală a băncii de date rezultînd şi din figura 5.

Menţinerea datelor se va face în BATCH-PROCESSING ţinînd seama de gradul destul de redus de volatilitate al fişierelor implicate.

În acelaşi timp trebuie menţionat că sistemul permite menţinerea rapidă, cu timpi de prelucrare apropiaţi de timpii conversaţionali.

Utilizarea bazelor de date statistice de concepţie proprie în cadrul sistemului informatic al învăţămîntului va constitui principalul suport al dezvoltării sistemului avînd performanţe tehnice deosebit de ridicate şi corespunzînd în întregime cerinţelor impuse acestui sistem important pentru conducerea eficientă a activităţilor din învăţămînt.

BIBLIOGRAFIE

1. BILCIU C., DIACONESCU G.: *Sistemul informatic — sistem modern de conducere al învăţămîntului.* Revista economică, nr. 51, 1976.
2. PESCARU V., BILCIU C., DUMITRESCU I., SATRAN I.: *Iniţiere în teleprelucrarea datelor.* Editura tehnică, Bucureşti, 1973.
3. DIACONESCU G.: *Principii de organizare şi creare a unei baze de date statistice.* Studii şi cercetări de calcul economic şi cibernetică economică, nr. 2, 1976.
4. MARTIN J.: *Computer Data Base Organization.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1975.
5. ABRIEL S. R.: *Projet Socrate ; données, mémoires et utilisateurs d'une banque de données.* Journées-software des banques de données, Aix-en-Provence, 17 iunie, 1971.
6. DIACONESCU G.: *Asupra regăsirii informaţiei în baze de date statistice.* Studii şi cercetări de calcul economic şi cibernetică economică, nr. 1, 1976.

10.X.1976

R. STROE
Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

Intercorelarea prognoză-planificare în profil teritorial

Lucrarea abordează ca principale probleme: conținutul intercorelării prognoză-planificare și structurile intercorelării prognoză planificare în țara noastră, ca și definirea conceptului de omogenizare. Sînt tratate pe larg aspecte ale dinamicii omogenizării dezvoltării teritoriale, studiindu-se o serie de indicatori pe baza cărora se pun în evidență modificări ale structurilor teritoriale și se analizează indicii de decalare față de medie și față de județele cu nivel maxim.

1. ASPECTE PRINCIPIALE ȘI METODOLOGICE GENERALE

Strategia revoluționară, științifică, a progresului social economic este elaborată de partid pe baza învățăturii sale revoluționare cu privire la progresul social, fundamentată pe concepția materialist-dialectică și istorică, pe experiența practică a construcției socialiste. În concepția partidului nostru progresul social se află în strînsă conexiune cu nivelul științific la care se desfășoară procesul de conducere. Progresul rapid și multilateral al ansamblului ei și al fiecărei componente în parte depinde de modul în care societatea noastră dirijează dezvoltarea forțelor de producție, le asigură justa repartizare teritorială, folosește corespunzător mijloacele financiare, umane și materiale. Exprimînd acest lucru, președintele Republicii, tovarășul Nicolae Ceaușescu, arăta: „Știința conducerii sociale capătă o importanță deosebită în condițiile noii orînduiri constituind un factor hotărîtor în desfășurarea cu succes a operei de construire a socialismului și comunismului" [5].

Unul din principiile de bază ale conducerii societății socialiste îl constituie conducerea unitară a întregii activități economico-sociale. Aceasta implică îmbinarea conducerii centralizate cu o autonomie largă a unităților economice și a organelor locale teritoriale, creșterea rolului județelor și spo-

rirea activităţilor comunelor în conducerea întregii activităţi din raza teritorială respectivă [5].

Conducerea planificată a vieţii economice şi sociale este concepută de partidul nostru ca o activitate continuă, care ţine seama atît de prezent cît şi de viitor. Schimbările economice şi sociale, a căror dinamică înaltă caracterizează traiectoriile de evoluţie în spaţiul economic naţional şi mondial necesită tot mai mult elaborarea unor strategii de dezvoltare de lungă perspectivă, previzionarea fenomenelor economico-sociale în vederea fundamentării deciziilor de politică economică. Activitatea de prognoză a dezvoltării economico-sociale este cerută în prezent de o serie de factori printre care [10]:

— amploarea şi intensitatea revoluţiei tehnico-ştiinţifice;
— folosirea raţională a resurselor materiale şi umane;
— intensificarea relaţiilor economice dintre state;
— diviziunea internaţională a muncii.

Gradul înalt de conştientizare a dezvoltării, creşterea complexităţii actului de decizie, caracterul unitar al economiei fac ca, în condiţiile socialismului, activitatea de previziune să fie necesară, să-şi lărgească cîmpul de acţiune.

Pe baza schiţei de perspectivă pînă în 1990 a dezvoltării economice adoptată de Congresul al XI-lea al partidului, precum şi a Programului P.C.R., activitatea de planificare se realizează în prezent în ţara noastră prin prospectări aprofundate şi de largă perspectivă (20—25 de ani şi chiar mai mult) a spaţiului şi timpului economic naţional.

Fundamentarea planurilor cincinale este efectuată prin studii de prognoză. Natura unora din problemele dezvoltării economice, ca de pildă progresul ştiinţei şi ingineriei tehnologice, descoperirea şi valorificarea resurselor de materii prime, dezvoltarea energeticii, continua îmbunătăţire a pregătirii cadrelor ş.a., necesită o perioadă mai îndelungată de cinci ani. De aceea, planurile cincinale 1971—1975 şi 1976—1980 au fost integrate în schiţe de perspectivă mai largă, cu orizonturi de 10 şi respectiv 15 ani. Acest lucru a fost posibil şi datorită studiilor şi programelor elaborate din iniţiativa conducerii superioare de partid cu privire la dezvoltarea unor subramuri de mare importanţă ale industriei constructoare de maşini şi a energeticii, a programelor naţionale de irigaţii şi de dezvoltare zootehnică, ca şi a celor privind pregătirea cadrelor şi cercetarea ştiinţifică. Pe baza studiilor de prognoză se pot fundamenta priorităţile, opţiunile şi deciziile privind dezvoltarea economico-socială a ţării.

În raportul prezentat de tovarăşul Nicolae Ceauşescu la Conferinţa Naţională din iulie 1972 au fost definite cu claritate rolul prognozelor în ansamblul activităţii de conducere, precum şi legătura organică a acestora cu planul naţional unic.

Obiectivul strategic general al partidului nostru — făurirea societăţii socialiste multilateral dezvoltate, este definit în Programul Partidului Comunist Român. Obiectivele strategice particulare, pe domenii sau ca eşalonare temporală, sînt fundamentate în prognozele de lungă perspectivă, care reprezintă în fapt părţi ale Programului partidului. Obiectivele strategice pe termen scurt sînt cuprinse în planurile cincinale şi se concretizează prin planurile anuale. Transformarea prognozelor dezvoltării economico-sociale pe termen lung într-un element constitutiv al actului de conducere creează

condiții pentru încadrarea activității curente într-o previziune și o strategie de lungă perspectivă. Se creează, totodată, posibilitatea îmbinării organice a planului cu prognoza, a elaborării și fundamentării acestui plan în perspectiva timpului economic și a traiectoriilor de evoluție de lungă perspectivă a sistemului economiei naționale în spațiul economic național. Programul partidului reprezintă fundamentul constituirii într-un tot unitar, corelat, a prognozelor, programelor speciale de măsuri pe probleme, planurilor cincinale și planurilor anuale, planului în profil teritorial, pe baza cărora întregul popor acționează pentru construirea societății socialiste multilateral dezvoltate.

Sporirea rolului planului național unic în conducerea întregii economii a amplificat necesitatea îmbinării organice plan-prognoză și pornind de la aceasta, preocupările în direcția cercetărilor prospective pe termen lung. Fiind premergătoare lucrărilor de planificare, studiile de prognoză oferă un bogat material pentru elaborarea priorităților, a opțiunilor și deciziilor privind dezvoltarea economico-socială a țării. Astfel, în practica activității de conducere și planificare din țara noastră prognozele au menirea să estimeze evoluția probabilă, cantitativă și calitativă, într-o perspectivă de 15—20 de ani și uneori mai mare, a unor procese privind dinamica și modificările structurale ale producției materiale, progresul tehnico-științific, dinamica demografică și modificările în structura populației și forței de muncă, repartizarea teritorială a forțelor de producție etc.

2. DEZVOLTAREA RAȚIONALĂ ÎN PROFIL TERITORIAL — OBIECTIV STRATEGIC MAJOR AL POLITICII PARTIDULUI COMUNIST ROMÂN

În practica curentă a planificării, planul se fundamentează în prezent pe prognoză nu numai la nivel central, ci și în profil teritorial, la nivelul unităților teritoriale (județ, municipiu, oraș, comună). Aceasta exprimă pe plan general, principiul realizării corelației prognoză-planificare în profil teritorial.

Prognozele teritoriale au ca obiect evidențierea variantelor de dezvoltare economico-socială a județelor și îmbunătățirile ce vor trebui aduse în structura economiei lor, prin amplasarea rațională a forțelor de producție, valorificarea superioară a resurselor naturale, folosirea intensivă a potențialului productiv și utilizarea judicioasă a forței de muncă, creșterea nivelului de trai material și cultural al populației. Toate aceste obiective exprimă la nivelul ansamblului economiei naționale strategia generală a omogenizării dezvoltării în profil teritorial definită în Programul P.C.R. ca direcția principală a făuririi societății socialiste multilateral dezvoltate și înaintării spre comunism. Încă din 1966, tovarășul Nicolae Ceaușescu a definit ca teză de bază în politica dezvoltării în profil teritorial — lichidarea rămînerii în urmă a unor regiuni, dezvoltarea armonioasă a bazei tehnico-materiale a socialismului pe întreg teritoriul patriei ca principală cale a creării condițiilor pentru mersul înainte al societății socialiste, pentru trecerea treptată spre comunism. Totodată s-a subliniat ideea că progresul general al societății este indisolubil legat de organizarea judicioasă a teritoriului și administrației locale, care favorizează amplasarea rațională a forțelor de producție pe cuprinsul țării, dezvoltarea armonioasă a diferitelor zone și localități [4].

Împărțirea teritorial-administrativă a țării efectuată în 1968 nu a constituit o simplă măsură administrativă, ci a reprezentat o cotitură calitativă deosebită în dezvoltarea tuturor zonelor și județelor țării noastre, în ridicarea nivelului de civilizație al întregului nostru popor. Acest lucru este pus în evidență de evoluția întregii dezvoltări în profil teritorial a țării. În anul 1968 structura județelor după volumul producției industriale se prezenta conform tabelului 1 [4].

Tabelul 1

Valoarea producției globale industriale (miliarde lei)	Număr de județe
pînă la 2	14
de la 2 la 4	8
de la 4 la 6	9
peste 6	8

Directivele Congresului al XI-lea al Partidului [2] trasează sarcina unui salt calitativ uriaș. Astfel, pînă în 1980 se va realiza o producție industrială de minimum 10 miliarde lei în fiecare județ. Dinamica structurii județelor după valoarea producției industriale (tabelul 2) și agricole (tabelul 3) [8] marchează procesul continuu de îmbunătățire a repartizării teritoriale a forțelor de producție.

Tabelul 2

Producția industrială anuală	Numărul județelor			
	1965	1970	1975	1980
pînă la 2 mld. lei	14	5	1	—
2,1—4 mld. lei	13	11	4	—
4,1—10 mld. lei	9	15	14	—
10,1—15 mld. lei	3	5	7	16
15,1—25 mld. lei	—	3	11	12
peste 25 mld. lei	1	1	3	12

Se prevede ca din județele ce vor da producții industriale de peste 25 miliarde lei [16], 8 județe să aibă o producție între 25 și 50 miliarde lei, iar 4 — peste 50 miliarde lei.

Tabelul 3

Producția agricolă medie anuală pe cincinale	Numărul județelor		
	1966—1970	1971—1975	1976—1980
pînă la 1,5 mld. lei	21	14	1
1,6—2,5 mld. lei	12	14	14
2,6—3,5 mld. lei	5	7	9
3,6—4,0 mld. lei	1	1	6
peste 4,0 mld. lei	1	4	10

Trebuie remarcat faptul că, dacă în cincinalul 1966—1970, 33 din județele țării realizau o producție medie anuală de pînă la 2,5 miliarde lei, în cincinalul 1976—1980 este prevăzut ca 25 de județe să aibă o producție medie anuală de peste 2,5 miliarde lei.

Aceste realizări constituie pași importanți în dezvoltarea armonioasă, complexă și multilaterală a economiei românești. Ele materializează grija permanentă a conducerii de partid și de stat de a corela continuu în deciziile de comandă, reglare și control a traiectoriilor de evoluție în spațiul economic național, aspectele privind atragerea în circuitul economic a tuturor zonelor și regiunilor țării, valorificarea superioară a resurselor naturale și umane de pe tot cuprinsul țării, sporirea eficienței utilizării acestor resurse, precum și a celor financiare.

3. INTERCORELAREA PLAN-PROGNOZĂ PE PLANUL ORGANIZĂRII ACTIVITĂȚII ȘI INSTRUMENTARULUI DE LUCRU

Considerăm că intercorelarea plan-prognoză, trebuie privită mai întîi pe planul organizării activității și al instrumentarului de lucru utilizat în procesul de conducere a dezvoltării economico-sociale a țării.

Pe planul organizării activității, aceasta se referă la activitatea de prognoză și la activitatea de planificare. Teoretic cele două activități sînt distincte: prognoza este o activitate de fundamentare a deciziilor, iar planificarea o activitate de exprimare, concretizare și detaliere a deciziilor în vederea materializării lor prin procesul de producție. Acest lucru apare prin diferențierile dintre cele două activități în ceea ce privește:

- pătrunderea în viitor;
- caracterul strategiei (generală sau limitată);
- metodele concrete de investigare și de trasare a traiectoriilor de evoluție în spațiul economic național;
- gradul de detaliere a parametrilor economiei cu care se lucrează;
- cadrul instituțional.

Practic însă ele se întrepătrund, se condiționează reciproc, își furnizează informații. Acest lucru este determinat de faptul că ambele sînt subordonate obiectivului strategic de largă perspectivă și soluționează problemele ridicate de înaintarea societății românești pe traiectoria progresului social spre comunism.

De asemenea, atît prognoza cît și planificarea acționează asupra avuției naționale, își găsesc resursele și efectele în bogăția națiunii și în creșterea ei.

Pe planul instrumentarului de lucru, intercorelarea se referă la prognoză și la plan. Dacă în privința planificării, terminologia economică curentă ne permite să distingem prin formațiuni lexicale diferite activitatea de instrument (sînt împămînteniți și generalizați cu consens unanim în limbajul economic termenii „planificare" — activitate, și „plan" — instrument), în ce privește prognoza nu dispunem încă de accepțiuni generalizate. În mod curent atît activitatea cît și instrumentul sînt formulate ca „prognoză", și sensul îl dă contextul. O serie de alți termeni circulați, cum sînt proiectare, previziune, program etc., au uz particular și sînt deja marcați de folosirea cu alte sensuri. Acceptînd utilizarea curentă a termenului prognoză, cu sensul de instrument în acest context, cele două instrumente sînt distincte înainte de

toate prin activitatea din care au rezultat și în care, în același timp, sînt folosite. În ce privește intercorelarea celor două instrumente, aceasta își găsește expresia în faptul că ele formează un tot unitar în ansamblul instrumentarului conducerii științifice a societății noastre socialiste. Sub raportul orizontului de timp, prognoza are sfera de cuprindere mai largă, obiectul ei fiind legat de fundamentarea variantelor pentru deciziile cu caracter strategic, deci pe termen lung.

Referindu-se la raportul plan-prognoză, tovarășul Nicolae Ceaușescu [6] arăta că elaborarea prognozelor pe orizontul 1990—2000 reflectă preocuparea partidului și statului nostru pentru asigurarea mijloacelor corespunzătoare înfăptuirii obiectivului strategic, avînd în vedere toate laturile activității economico-sociale, creșterea continuă a bunăstării materiale și spirituale a întregului popor. În același timp, tovarășul Nicolae Ceaușescu a caracterizat locul prognozei în programul general al partidului, unitatea prognoză-plan: „Se poate spune că *prognozele vor reprezenta în fapt o parte a programului general al partidului* (sublinierea noastră). În planul cincinal se vor prevedea obiective strategice limitate, în vederea realizării pe etape a planului general strategic, iar în cadrul planurilor anuale se vor stabili de fapt obiective tactice, elemente ale planurilor strategice cincinale, ale strategiei generale a partidului. Se poate spune deci că *prognozele, planurile cincinale și anuale constituie un tot unitar* (sublinierea noastră); în cadrul lor, partidul, statul, întregul popor acționează unitar, conștient, în direcția înfăptuirii societății socialiste multilateral dezvoltate".

4. CORELAREA PLAN-PROGNOZĂ PE PLANUL RAPORTURILOR IERARHICE ÎNTRE ORGANELE TERITORIALE ȘI ORGANELE CENTRALE

Pe planul raporturilor ierarhice teritoriu-centru corelarea plan-prognoză în profil teritorial pune în evidență două ipostaze complementare:

a) corelarea teritoriu-centru în activitatea de planificare și prognoză;

b) corelarea plan-prognoză la nivelul fiecărei unități teritorial administrative.

4.1. **Corelarea teritoriu-centru în activitatea de planificare și prognoză** se referă în principal la corelarea sarcinilor dezvoltării teritoriului cu indicatorii de dezvoltare națională, respectiv la omogenizarea dezvoltării teritoriale.

Corelarea teritoriu-centru în procesul elaborării prognozelor și planului este prezentată schematic în figura 1.

Planul național unic prevede ca principală sarcină valorificarea rațională a rezervelor naturale, respectiv valorificarea deplină, maximă, superioară a acestora. Atragerea în circuitul economic de noi rezerve înseamnă de fapt antrenarea în acest circuit, pe noi planuri, mai amplu și mai intens, de noi bazine, zone și localități.

În cadrul planului național unic prevederile privind dezvoltarea producției, construirea de noi obiective, extinderea și modernizarea celor existente, punerea în valoare de noi zăcăminte etc., sînt legate indivizibil de probleme de amplasare. Prin acestea se creează o puternică interdependență

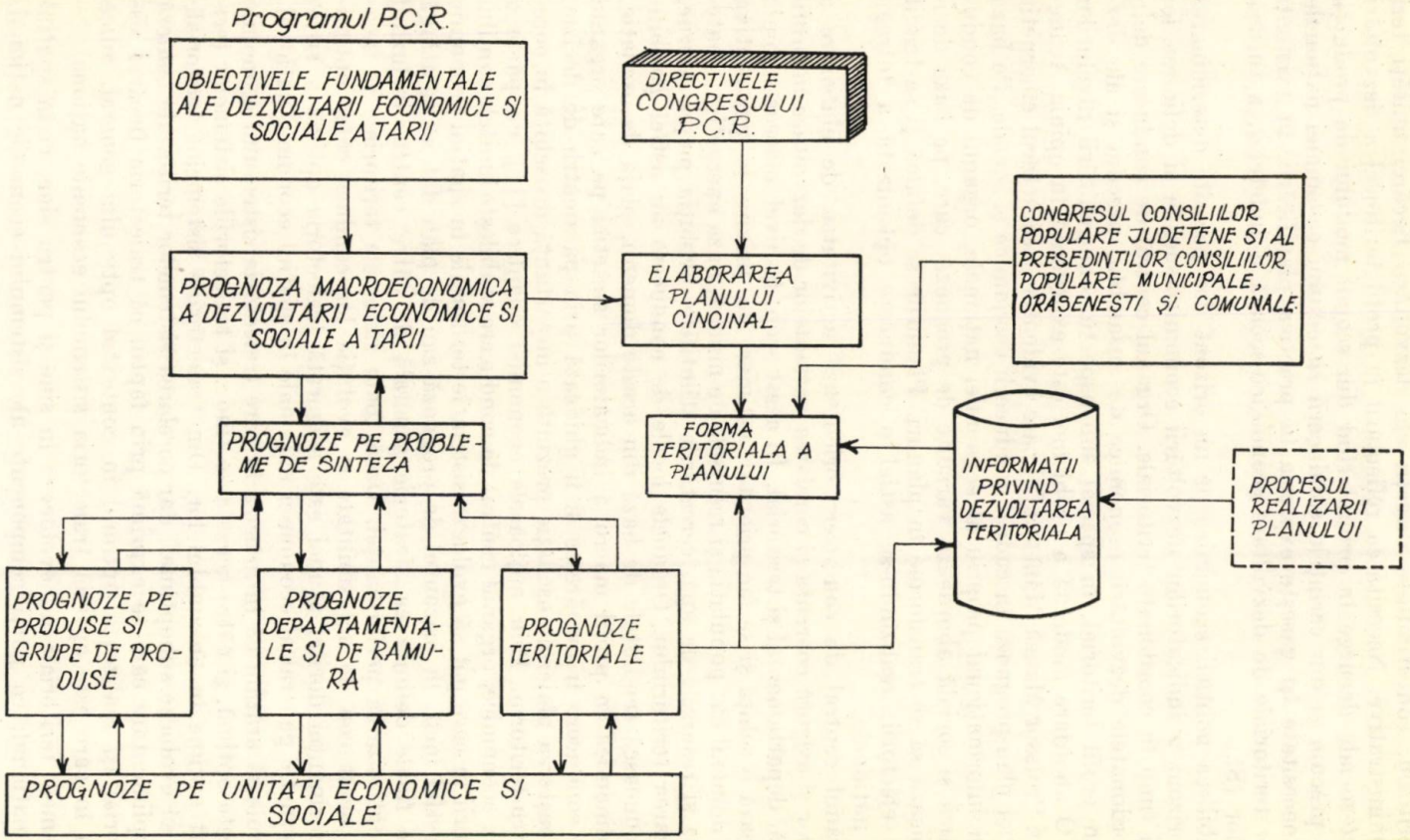

Programul P.C.R.
OBIECTIVELE FUNDAMENTALE ALE DEZVOLTARII ECONOMICE SI SOCIALE A TARII
DIRECTIVELE CONGRESULUI P.C.R.
CONGRESUL CONSILIILOR POPULARE JUDETENE SI AL PRESEDINTILOR CONSILIILOR POPULARE MUNICIPALE, ORĂȘENEȘTI ȘI COMUNALE
PROGNOZA MACROECONOMICA A DEZVOLTARII ECONOMICE SI SOCIALE A TARII
ELABORAREA PLANULUI CINCINAL
PROGNOZE PE PROBLEME DE SINTEZA
FORMA TERITORIALA A PLANULUI
INFORMATII PRIVIND DEZVOLTAREA TERITORIALA
PROCESUL REALIZARII PLANULUI
PROGNOZE PE PRODUSE SI GRUPE DE PRODUSE
PROGNOZE DEPARTAMENTALE SI DE RAMURA
PROGNOZE TERITORIALE
PROGNOZE PE UNITATI ECONOMICE SI SOCIALE

Fig. 1: CORELAREA ELABORARII PROGNOZELOR SI PLANULUI

centru-teritoriu, conturîndu-se direcţii ale dezvoltării fiecărei unităţi teritorial-administrative. Necesitatea reflectării în profil teritorial a dezvoltării economico-sociale decurge în primul rînd din scopul modului de producţie socialist, precum şi din cerinţele conducerii sistemului economiei naţionale. Această necesitate îşi găseşte expresia în practica planificării, în existenţa planurilor teritoriale de dezvoltare economico-socială a judeţelor, a tuturor localităţilor [8].

Stabilirea politicii economice pe un orizont dat permite determinarea pe acel orizont a indicatorilor dezvoltării economico-sociale şi definirea lor în acelaşi timp în coordonate teritoriale. Organul central de conducere defineşte coordonatele dezvoltării economice de ansamblu, precum şi ale dezvoltării în profil teritorial, în special sub aspectul omogenizării nivelurilor acesteia. O abordare modernă a problemei este exprimată în opinia Academicianului Profesor Manea Mănescu [9] care evidenţiază caracterul cibernetic al corelaţiei plan-prognoză în cadrul conducerii economice şi sociale. Pe baza sistemului informaţional propriu al economiei naţionale, organul de conducere politică şi socială abordează variante de prognoză, care, pe baza deciziilor urmează să se transforme în planuri. Planurile se defalcă şi se trimit organelor efectorii, realizîndu-se astfel o conducere optimizată a întregii economii naţionale.

Organul central de conducere orientează activitatea de elaborare a prognozelor şi asigură coerenţa şi corelarea variantelor de dezvoltare în profil de ramură, departamental şi teritorial. În acest scop, la nivel macroeconomic se elaborează o schiţă şi se fac prioritar estimări cu privire la perspectiva din unele domenii ca: populaţia şi resursele de muncă, baza energetică, materiile prime şi resursele de apă, cercetările ştiinţifice, evoluţia pieţei interne, sistematizarea teritoriului. Organele locale de conducere au astfel posibilitatea să cunoască tendinţele de bază din aceste domenii, plaja de oscilaţie, evoluţia dinamică în profil macro a indicatorilor sintetici pe care organul central de conducere îi urmăreşte şi îi ghidează prin parametrii de decizie.

Cunoaşterea plajei de oscilaţie prezintă o importanţă deosebită în corelarea centru-teritoriu. Prin mijloacele economiei cuantice [11], ca parte a ciberneticii economice, organul central de conducere stabileşte limitele conului de traiectorii în care pot să evolueze sistemele teritoriale în spaţiul economic naţional astfel încît, în orizontul de prognoză sau de plan dat, să se atingă obiectivele finale definite ca strategie generală de către centru, incluzînd între ele optimizarea performanţei. Dacă toate sistemele teritoriale se încadrează în acest con de accesibilitate şi evoluţia lor conduce către optimizarea performanţei dorite, atunci este asigurată traiectoria optimă a sistemului cibernetic general al economiei naţionale în spaţiul economic naţional.

Trebuie să arătăm că în măsura în care traiectoria sistemului economic naţional este optimă, şi către aceasta se tinde, şi traiectoriile sistemelor teritoriale sînt optime în ansamblul lor. Din traiectoriile sistemelor teritoriale unele pot să evolueze suboptimal, dar corelarea sistemelor teritoriale conferă calităţi suplimentare care se exprimă prin faptul că traiectoria fiecărui sistem teritorial îşi realizează optimul în contextul optimului general, adică în măsura în care este optimă traiectoria sistemului economic naţional.

Sistemele teritoriale nu evoluează în sine şi pentru sine, ci în spaţiul economic naţional, ca părţi componente ale sistemului economic naţional.

Ele sînt puternic corelate între ele, interconectate cu legături directe și inverse prin intermediul unor fluxuri materiale, financiare, tehnice, de informație etc. Determinarea pentru fiecare sistem teritorial a acelor traiectorii de evoluție care să asigure corelarea cu evoluția de ansamblu a tuturor sistemelor teritoriale și totodată să contribuie într-o măsură maximă și cît mai eficientă la realizarea indicatorilor stabiliți de centru, constituie cerințe fundamentale și, în același timp, componente esențiale ale intercorelării plan-prognoză în profil teritorial.

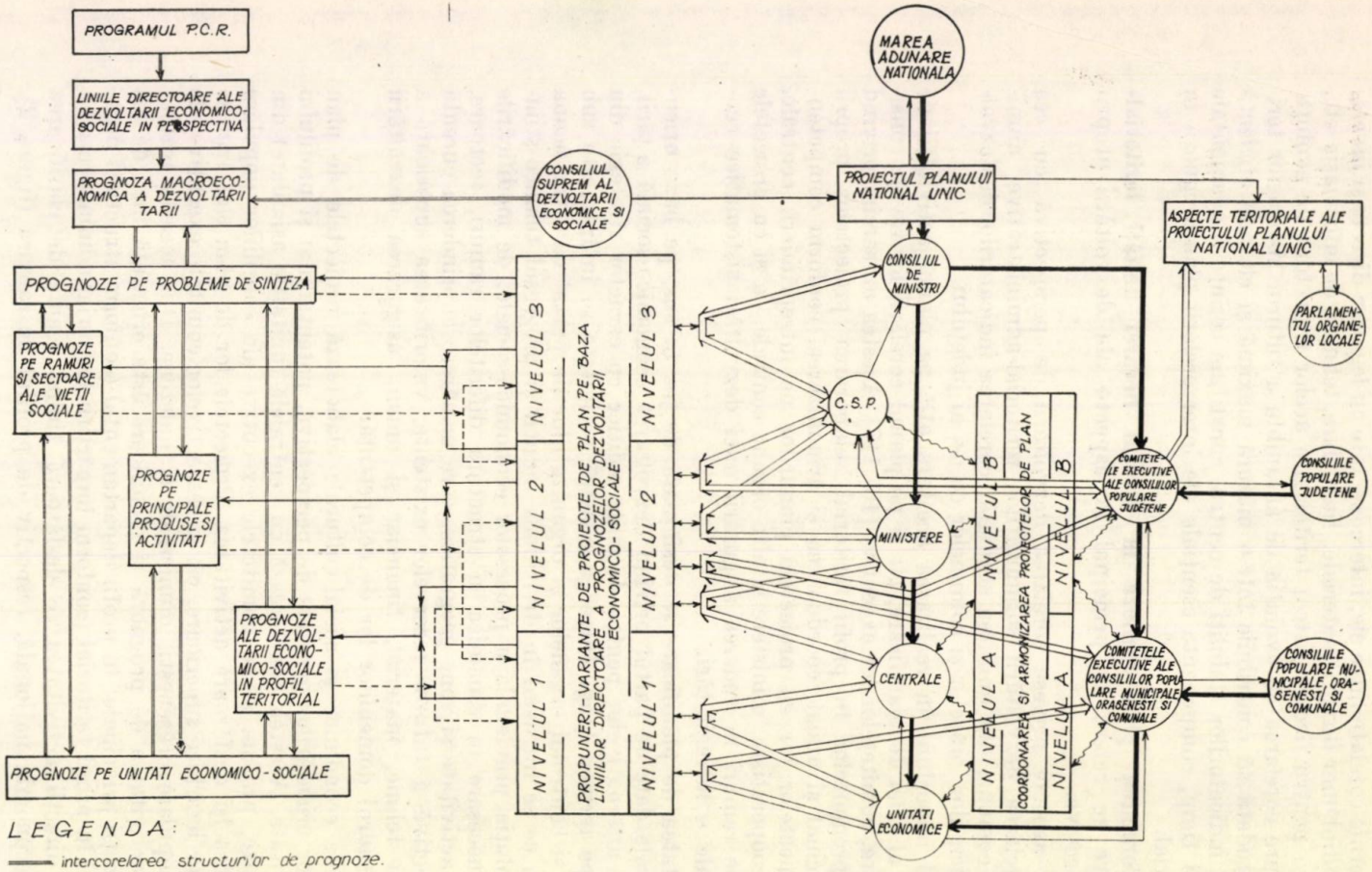
4.2. **Corelarea plan-prognoză la nivelul fiecărei unități teritorial-administrative** se referă în principal la aspecte ale dezvoltării proprii unității respective.

Aceste aspecte privesc corelarea dezvoltării de perspectivă cu cea curentă, corelarea dezvoltării subunităților teritorial-administrative, municipii, orașe, comune, din unitatea studiată, corelarea indicatorilor de dezvoltare ai municipiilor, orașelor și comunelor cu cei ai județului.

Un rol important în realizarea acestora atît pe planul activității de prognoză și al celei de planificare, cît și pe planul corelării lor revine consiliilor populare, comitetelor lor executive [16], [17]. Acestea au sarcini privind elaborarea prognozelor în profil teritorial, elaborarea proiectelor proprii de plan cincinal și anual, coordonarea și armonizarea, conform competențelor, a proiectelor lor cu proiectele planurilor pe întreprinderi, centrale, organizații cooperatiste, ministere și alte organe centrale, ca și cu proiectele planurilor pe ramuri în vederea asigurării unei dezvoltări sistematice economico-sociale a întregii țări.

Activitatea de planificare se desfășoară de jos în sus, pe baza orientărilor generale date de partid privind dezvoltarea economico-socială a țării, precum și a alternativelor pentru deciziile politice cu caracter strategic din prognozele pe termen lung. Întreaga noastră activitate se înfăptuiește sub îndrumarea și controlul organelor și organizațiilor de partid care țin seama de mutațiile ce se întrevăd în diviziunea muncii și progresul tehnico-științific, de evoluția previzibilă a proceselor economico-sociale, de modificările posibile și necesare în dinamica și structura diferitelor ramuri, sectoare, domenii de activitate și zone geografice, care urmăresc cuprinderea curentă și în perspectivă a tuturor rezervelor existente, valorificarea superioară a potențialului tehnic, material, financiar și uman, asigurarea dezvoltării corelate în cadrul domeniilor lor de competență.

Unitățile economice și social-culturale elaborează proiectele de plan corespunzător orientărilor generale de perspectivă, potențialului și profilului lor de activitate. Acestea conlucrează cu centralele (unitățile asimilate) din care fac parte, precum și cu comitetele executive ale consiliilor populare pe raza cărora își desfășoară activitatea. Proiectele lor de plan sînt trimise atît organelor ierarhice superioare, cît și respectivelor comitete executive ale consiliilor populare orășenești, municipale și județene. Din aceasta rezultă evident că activitatea de prognoză și planificare este orientată încă de jos pe două direcții principale: în profil departamental (conform structurii organizatorice) și în profil teritorial (conform împărțirii teritorial-administrative). Pe ambele direcții activitatea se desfășoară ținînd seama de clasificarea unitară pe economia națională, respectiv de profilul de ramură (figura 2).


PROGRAMUL P.C.R.
LINIILE DIRECTOARE ALE DEZVOLTARII ECONOMICO-SOCIALE IN PERSPECTIVA
PROGNOZA MACROECONOMICA A DEZVOLTARII TARII
CONSILIUL SUPREM AL DEZVOLTARII ECONOMICE SI SOCIALE
MAREA ADUNARE NATIONALA
PROIECTUL PLANULUI NATIONAL UNIC
ASPECTE TERITORIALE ALE PROIECTULUI PLANULUI NATIONAL UNIC
PROGNOZE PE PROBLEME DE SINTEZA
PROGNOZE PE RAMURI SI SECTOARE ALE VIETII SOCIALE
PROGNOZE PE PRINCIPALE PRODUSE SI ACTIVITATI
PROGNOZE ALE DEZVOLTARII ECONOMICO-SOCIALE IN PROFIL TERITORIAL
PROGNOZE PE UNITATI ECONOMICO-SOCIALE
NIVELUL 1
NIVELUL 2
NIVELUL 3
PROPUNERI-VARIANTE DE PROIECTE DE PLAN PE BAZA LINIILOR DIRECTOARE A PROGNOZELOR DEZVOLTARII ECONOMICO-SOCIALE
CONSILIUL DE MINISTRI
C.S.P.
MINISTERE
CENTRALE
UNITATI ECONOMICE
NIVELUL A
NIVELUL B
COORDONAREA SI ARMONIZAREA PROIECTELOR DE PLAN
PARLAMENTUL ORGANELOR LOCALE
COMITETELE EXECUTIVE ALE CONSILIILOR POPULARE JUDETENE
CONSILIILE POPULARE JUDETENE
COMITETELE EXECUTIVE ALE CONSILIILOR POPULARE MUNICIPALE, ORASENESTI SI COMUNALE
CONSILIILE POPULARE MUNICIPALE, ORASENESTI SI COMUNALE

LEGENDA:

- intercorelarea structurilor de prognoze.
- propuneri - variante de prognoze.
- prognoze pe structuri.
- elaborarea proiectului planului național unic.
- intercorelarea prognoză - plan în cadrul elaborării proiectului de plan.
- intercorelarea teritoriu - departament în coordonarea și armonizarea proiectelor de plan.
- repartizarea sarcinilor de plan.

Fig. 2: SCHEMA INTERCORELARII PROGNOZA - PLANIFICARE IN PROFIL TERITORIAL.

În procesul de elaborare, fundamentare și definitivare a proiectelor de plan, cît și a stabilirii alternativelor cu caracter strategic din prognozele pe termen lung, întreprinderile, centralele și ministerele colaborează cu comitetele executive ale consiliilor populare orășenești, municipale și județene pentru coordonarea proiectelor planurilor în profil departamental cu proiectele planurilor în profil teritorial.

Pe baza propunerilor unităților economice și social-culturale, comitetele executive ale consiliilor populare comunale, orășenești și municipale își elaborează propriile proiecte de planuri urmărind încadrarea optimă a unităților respective în dezvoltarea economico-socială a comunei, orașului, municipiului. Aceste proiecte de planuri se transmit comitetelor executive ale consiliilor populare județene care elaborează, în conlucrare cu unitățile teritorial-administrative subordonate, cu centralele, uniunile de cooperative, ministerele și alte organe centrale, proiectul planului de dezvoltare economico-socială a județului.

Acționînd în spiritul centralismului democratic, al sporirii rolului activ pe care consiliile populare sînt chemate să îl joace în înfăptuirea politicii partidului și statului, în dezvoltarea economico-socială a județelor și localităților, tovarășul Nicolae Ceaușescu a propus Congresului consiliilor populare județene și al președinților consiliilor municipale, orășenești și comunale o serie de măsuri privind îmbunătățirea în continuare a conducerii și îndrumării acestora. Pe planul activității de planificare aceste măsuri se referă *la dezbaterea anuală a planului unic de dezvoltare economico-socială, în special a problemelor legate de realizarea lui în profil teritorial.* În expunerea la congres, tovarășul Nicolae Ceaușescu arăta [8]: „În această privință un rol important revine, desigur, *congresului* (sublinierea noastră) — noul forum al organelor locale ale puterii și administrației de stat, care se va ține o dată la cinci ani. Dar, pentru a asigura dezbaterea anuală a planului unic de dezvoltare economico-socială, în special a problemelor legate de realizarea lui în profil teritorial, apare necesară constituirea unui organism cu activitate permanentă, alcătuit din deputații comitetelor executive ale consiliilor populare județene, care să aibă rolul de *adevărat parlament al organelor locale ale puterii și administrației de stat* (sublinierea noastră) și să se convoace anual, înainte de sesiunile Marii Adunări Naționale consacrate adoptării planurilor și bugetelor de stat. Acest organism va putea aduce, fără îndoială, o contribuție importantă la fundamentarea științifică realistă și democratică a obiectivelor dezvoltării economico-sociale a tuturor localităților, a întregii țări".

În corelarea la nivelul fiecărei unități teritorial-administrative o pondere importantă revine producției cooperatiste. Cooperativele și uniunile de cooperative conlucrează pe plan local cu comitetele executive ale consiliilor populare pentru încadrarea planurilor lor în orientările generale privind dezvoltarea economico-socială a unității teritorial-administrative în care își desfășoară activitatea.

Corelarea plan-prognoză la nivelul fiecărei unități teritorial-administrative este mai dificil de investigat, printre altele și pentru faptul că multă vreme nu a existat o metodologie unitară de prognoză sau de planificare în profil teritorial. Astfel, unitățile economice primeau defalcările de plan și raportau realizările numai în profil departamental. În investigațiile întreprinse în acest sens pentru zona bazinului hidrografic al Mureșului superior

[12], [13], [14], [15], ne-am lovit de unele greutăți reflectînd imperfecțiuni ale aplicării metodologiei de prognoză și planificare constînd în:

— modificarea de la un an la altul a titularilor de plan, deci și a celor ce raportează realizările, fără efectuarea corelațiilor necesare în datele statistice în sensul recalculărilor pentru asigurarea comparabilității datelor;

— modificări în structura organizatorică a centralelor cu efecte negative privind analiza statistică a realizărilor;

— modificări în ce privește combinarea, centralizare a sau descentralizarea unităților economice, fără operarea recalculărilor corespunzătoare;

— imposibilitatea defalcărilor pe subunități teritoriale a indicatorilor de producție la unele unități economice, cum sînt întreprinderile de rețele electrice, întreprinderile de industrie locală, cooperativele meșteșugărești și altele.

Aceste imperfecțiuni ale sistemului informațional economic la nivel teritorial, pot fi depășite numai în măsura în care documentele de raportare existente își vor modifica conținutul corespunzător noilor structuri economice și exigențe ale conducerii economiei. Printre aceste documente se numără în primul rînd „Caietul statistic al localității" care ar putea centraliza, chiar exhaustiv, starea economică a comunei sau orașului, constituind o importantă verigă în crearea unor fișiere economice sau bănci de date la nivel teritorial și, totodată, un valoros auxiliar în efectuarea analizelor economice ce stau la baza elaborării proiectelor de plan, a variantelor de prognoză și a corelării plan-prognoză în profil teritorial.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Directivele Congresului al XI-lea al P.C.R.* Editura politică, București, 1974.
2. * * * *Programul Partidului Comunist Român de făurire a societății socialiste multilateral dezvoltate și înaintare a României spre comunism.* Editura politică, București, 1975.
3. NICOLAE CEAUȘESCU: *Planul cincinal — o nouă etapă de progres și prosperitate în viața poporului român, în înflorirea României socialiste* (28 iunie 1966). În: România pe drumul desăvîrșirii construcției socialiste. Volumul I, Editura politică, București, 1968.
4. NICOLAE CEAUȘESCU: *Expunere cu privire la îmbunătățirea organizării administrative a teritoriului R.S.R.* (15 februarie 1968). În: România pe drumul desăvîrșirii construcției socialiste. Volumul III, Editura politică, București, 1969.
5. NICOLAE CEAUȘESCU: *Expunere la deschiderea colocviului privind problemele științei conducerii societății* (6 martie 1972). În: România pe drumul construirii societății socialiste multilateral dezvoltate. Volumul VII, Editura politică, București, 1973.
6. NICOLAE CEAUȘESCU: *Raport prezentat la Conferința Națională a Partidului Comunist Român* (19 iulie 1972). În: România pe drumul construirii societății socialiste multilateral dezvoltate. Volumul VII, Editura politică, București, 1973.
7. NICOLAE CEAUȘESCU: *Raport prezentat la Congresul al XI-lea al Partidului Comunist Român* (26 noiembrie 1974). Editura politică, București, 1974.
8. NICOLAE CEAUȘESCU: *Expunere la Congresul consiliilor populare județene și al președinților consiliilor populare municipale, orășenești și comunale.* Scînteia, 5 februarie 1976.
9. MANEA MĂNESCU: *Rolul cibernetici în prognozarea dezvoltării economico-sociale a României.* Studii și cercetări de calcul economic și cibernetică economică, nr. 1, 1972.
10. MANEA MĂNESCU: *Planul național unic de dezvoltare economico-socială a României.* Era Socialistă, nr. 14 și 15, 1973.
11. MANEA MĂNESCU: *Cibernetica economică.* A.S.E. — Catedra de cibernetică economică, București, 1976.

12. STROE R., BOLDEANU D., ZAHARIA GH.: *Aspecte metodologice şi tehnici de prognoză a producţiei în profil teritorial.* Studii şi cercetări de calcul economic şi cibernetică economică, nr. 1, 1975.
13. STROE R., BOLDEANU D., ZAHARIA GH.: *Aplicaţii ale funcţiilor de producţie în prognoza dezvoltării economice a unei zone în curs de industrializare.* Simpozionul naţional al Universităţii, Craiova, 1973.
14. STROE R., BOLDEANU D., ZAHARIA GH.: *Tehnici de prognoză industrială în profil teritorial.* Conferinţa internaţională de teoria probabilităţilor. Braşov, 1974.
15. STROE R., NITS T., ALTĂR M.: *Echilibre regionale şi echilibrul naţional. Sistem cibernetic de modele pentru prognoza şi planificarea teritorială.* Colocviul româno-francez, Bucureşti, 1976.
16. * * * *Legea nr. 8/1972 cu privire la dezvoltarea economică-socială planificată a României.*
17. * * * *Legea nr. 1/1973 privind Consiliul Suprem al Dezvoltării Economice şi Sociale a României.*
18. * * * *Anuarul statistic al R.S.R.*, 1968—1976.

1.III.1977

Dr. ing. GH. BOLDUR-LĂȚESCU
Catedra de cibernetică economică —A.S.E.

Considerații asupra integrării disciplinelor decizionale

Multitudinea de orientări, metode și procedee existente în domeniul studiului deciziilor are drept consecință existența unor confuzii terminologice și frecventa orientare unilaterală a preocupărilor teoretice și aplicative în acest domeniu.

Prezenta lucrare ilustrează cu cîteva exemple această situație și schițează o propunere de abordare integratoare a problemelor decizionale, cu ajutorul analizei și proiectării sistemice.

Sînt bine cunoscute preocupările multiple din ultimii 20—25 de ani privind elaborarea unor metode teoretice și practice pentru îmbunătățirea proceselor decizionale, a căror importanță centrală în viața social-economică este din ce în ce mai mult recunoscută de specialiști.

Simpla enumerare a direcțiilor de cercetare și aplicare existente în domeniul relativ nou al studiului deciziilor relevă o mare diversitate în tratarea acestor probleme: cercetarea operațională, teoria deciziei, analiza sistemelor, informatica, dinamica industrială, praxiologia, tehnicile de simulare, unele capitole ale psihosociologiei. Diversele procedee ale managementului modern, cum ar fi: metoda cazurilor, conducerea prin obiective sau metoda analizei abaterilor propusă de Kepner-Tregoe [1], reprezintă tot atîtea moduri de a aborda problema atît de actuală a perfecționării actului decizional. De asemenea, preocupări privind analiza proceselor decizionale pot fi găsite în conținutul diverselor capitole ale ciberneticii, în econometrie și chiar și în străvechea știință a logicii.

Una din consecințele acestei multitudini de orientări și discipline cu caracter decizional este în primul rînd apariția confuziilor, care uneori au caracter terminologic, dar alteori pot fi mai grave. Pe de altă parte, trebuie

să menționăm tendința spre orientare unilaterală a preocupărilor teoretice și aplicative în acest domeniu, adică neglijarea sau chiar ignorarea aspectelor care nu fac parte dintr-un domeniu îngust de specializare. Rezultatul acestei situații este lipsa unei viziuni integratoare, de sinteză, atît de necesară problemelor de mare importanță și actualitate ale perfecționării luării deciziilor în toate domeniile de activitate.

Ne propunem să schițăm cîteva idei cu privire tocmai la o astfel de integrare a preocupărilor privind procesul decizional. Considerăm însă că înainte de a formula aceste idei sînt necesare unele precizări cu privire la conținutul diferitelor discipline decizionale.

Astfel, dacă ne referim la cercetarea operațională, observăm că obiectivul optimizării (sau suboptimizării) deciziilor cu ajutorul modelelor matematice îi preocupă în asemenea măsură pe teoreticienii și practicienii adepți ai acestor metode, încît ei pierd adesea din vedere problema aplicabilității lor practice.

Prea sînt numeroase cazurile în care modele ingenioase ale cercetării operaționale au rămas simple piese de dosar, ca să nu constatăm că mai trebuie făcuți cîțiva pași ca aceste modele să devină efectiv operaționale.

Privitor la procedeele dinamicii industriale, create de J. Forrester [2] și care au o largă utilizare în practica tehnico-economică, o dată cu constatarea modului realist de a aborda problema conducerii unor sisteme prin descrierea fluxurilor de materii prime și materiale, forță de muncă, fonduri bănești, echipamente și informații, nu putem să nu constatăm și tratarea mult prea sumară a proceselor de decizie care determină aceste fluxuri. Altfel spus, fluxurile sînt descrise prin binecunoscutele ecuații de ritm și de nivel, existînd posibilitatea ca prin simulare să fie luate unele decizii privind îmbunătățirea acestor fluxuri, deciziile avînd însă un caracter global. De fapt, „deciziile" în sensul dinamicii industriale sînt niște obiective pe care decidenții trebuie să le realizeze, fără a li se da nici un fel de indicație asupra soluțiilor decizionale de detaliu.

Teoria deciziei, care se vrea o disciplină generală a procesului decizional și care-și propune studiul structurii acestui proces (perspectiva descriptivă), dar și formularea unor reguli pentru a decide corect (perspectiva normativă), păcătuiește adesea prin schematizare teoretică excesivă, ceea ce o face foarte puțin aplicabilă în practică.

Cine folosește axiomatica lui von Neumann-Morgenstern în rezolvarea unor probleme decizionale concrete sau teoria lui Arrow în fundamentarea deciziilor de grup? Probabil că foarte puțini specialiști, dar asta nu înseamnă că, printr-o îmbinare cu alte metode decizionale mai legate de practică, metodele teoriei deciziei nu și-ar putea găsi aplicații practice.

În ceea ce privește informatica mulți specialiști o consideră pe bună dreptate un auxiliar decizional prețios, prin posibilitățile pe care le oferă privind înmagazinarea, organizarea și prelucrarea unor cantități uriașe de date. În aplicațiile practice ale informaticii, a apărut însă, nu o dată, situația ciudată în care mijlocul devine scop, sau, cu alte cuvinte, cînd se uită că sistemele de prelucrare electronică a datelor trebuie subordonate ferm obiectivelor decizionale. Crearea unor gigantice bănci sau baze de date și a unor programe supersofisticate de prelucrare a acestora n-au putut totdeauna

fi valorificate la nivelul așteptat, tocmai datorită neglijării aspectelor decizionale de către unii informaticieni.

Putem, desigur, continua cu enumerarea caracteristicilor altor discipline decizionale și cu observații similare privind deficiențele rezultînd din perspectiva îngustă pe care o adoptă unele dintre acestea, dar ne vom opri aici, întrucît apreciem că am ilustrat suficient de grăitor consecințele acestei perspective.

Să încercăm, în continuare, notarea unor idei privind posibilitățile de integrare eficientă a disciplinelor decizionale.

Este extrem de dificilă sarcina îmbinării diverselor discipline și metode decizionale într-o superdisciplină care să înglobeze rațional ce este util în fiecare dintre ele, eliminînd totodată redondanțele, deoarece aceasta implică în primul rînd cunoașterea perfectă a tuturor disciplinelor decizionale, adică a unui material teoretic și practic imens. În al doilea rînd, însăși îmbinarea este o muncă de creație, fiind necesară viziunea de perspectivă, dar în același timp, munca de detaliu. De aceea, considerăm că crearea unei discipline decizionale generale necesită un mare efort colectiv.

Consecvenți unor păreri mai vechi pe care le-am expus în lucrările [3], [4], [5] considerăm că există o disciplină-cadru care permite înglobarea multiplelor procedee și orientări decizionale. Ne referim la analiza și proiectarea sistemelor care își propune sub forma unor metodologii de lucru elaborarea unor *sisteme informațional-decizionale* eficiente.

Structura acestor metodologii (cele mai evoluate) permite utilizarea tuturor tehnicilor și procedeelor raționale de decizie.

Într-adevăr, în etapa studiilor preliminare și a releveului sistemului existent, se pot utiliza metode statistice, procedee de anchetă psihosociologică, tehnici Forrester pentru descrierea fluxurilor precum și alte procedee de caracterizare a unor situații existente, forma de prezentare a rezultatelor obținute în aceste etape fiind diverse tipuri de grafice, organigrame și fișe descriptive.

În etapa analizei critice și a proiectării unui nou sistem informațional-decizional mai eficient, metodele cercetării operaționale, simularea, teoria deciziei, tehnicile Forrester precum și alte procedee de modelare statistico-matematică pot fi utilizate cu succes alături de metodele și tehnicile informaticii, psihosociologiei, de metoda cazurilor, a conducerii prin obiective ș.a. Forma de prezentare a soluțiilor rămîne, în linii mari, cea utilizată în etapa de releveu, adică, cea în care predomină organigramele, schemele logice și formulările cuantificate.

În sfîrșit, în etapa de implementare, diferite procedee de instruire cum ar fi jocurile de întreprindere, alături de metodele psihosociologice, ergonomice și alte procedee de punere în practică a unor proiecte complexe, permit trecerea de la etapele de elaborare a conceptelor, la etapa de aplicație efectivă.

Integrarea într-o viziune de ansamblu [6], prezintă pe lîngă avantaje practice și o deosebită importanță teoretică, aceea de a transforma multitudinea de discipline și metode decizionale într-un sistem pluridisciplinar coerent, care va evolua cu timpul în direcția unei veritabile științe a conducerii.

BIBLIOGRAFIE

1. KEPNER C., TREGOE B.: *The Rational Manager*. Mc Grow-Hill, New York, 1968.
2. FORRESTER J.: *Industrial Dynamics*. M. I. T. Press, 1961.
3. BOLDUR GH.: *Procese informaționale și de decizie*. Editura științifică, București, 1969.
4. BOLDUR GH.: *Fundamentarea procesului decizional economic*. Editura științifică, București, 1973.
5. BOLDUR GH., CIOBANU GH., BĂNCILĂ I.: *Cartea analistului de sistem*. Editura științifică, București, 1976.
6. BOLDUR GH.: *Integrarea analizei și proiectării sistemice într-o teorie generală a ciberneticii economice*. Revista economică, nr. 12, 1974.

28.I.1977

Dr. N. VIŞINOIU
Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

Variaţia şi entropia — criterii de optim într-o problemă de transport cu ponderi

Pentru a se obţine minimizarea directă a distanţei medii, s-a formulat un model matematic inedit pentru o problemă de transport care utilizează mărimile relative de structură. Ameliorarea repartiţiei cantităţilor, ca urmare a aplicării algoritmului de optimizare, este pusă în evidenţă cu ajutorul stereogramelor şi al calculelor statistice.

În baza aplicaţiei prezentată în articol şi a altor probleme de transport din literatura de specialitate s-a constatat că întotdeauna se produce minimizarea abaterii lungimii rutelor de la distanţa medie. Cercetîndu-se problema de transport dintr-un alt punct de vedere, s-a identificat şi creşterea entropiei ca urmare a atenuării diferenţelor dintre probabilităţi, în urma transferului efectuat pentru îmbunătăţirea soluţiei iniţiale.

Caracteristicile problemei de transport au condus în final la avansarea ipotezei că ea se comportă ca un sistem care evoluează către stări tot mai organizate, pentru realizarea cerinţelor funcţiei obiectiv.

Pornind de la premiza că unele domenii aparent epuizate sînt încă capabile să furnizeze informaţii atunci cînd sînt abordate din noi puncte de vedere cu noi tehnici de calcul, vom încerca, cu ajutorul unor metode aparţinînd statisticii şi teoriei informaţiei, să surprindem modificările care se produc în intimitatea unei probleme de transport. Asemănător cu ceea ce se întîmplă în tehnică, translaţia unor metode statistico-matematice dintr-un domeniu economic în altul, permite să se obţină noi deschideri teoretice şi practice. Desigur că orice cercetare a optimizării transporturilor de mărfuri trebuie să se bazeze pe programarea liniară şi să ia în considerare faptul că

evoluția fluxurilor este o rezultantă a interacțiunii existente între creșterea economiei, marcată de modificarea legăturilor dintre ramuri, zone geografice, și dezvoltarea căilor de comunicații.

Pentru a pune mai bine în evidență schimbările care au loc în repartiția cantităților, ca urmare a îmbunătățirii soluției de bază, s-a rezolvat o problemă de transport utilizînd în paralel mărimi absolute și mărimi relative de structură. Întrebuințarea inedită a ponderilor cantităților $Y_{ij} = X_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} X_{ij}$ permite să se minimizeze direct distanța medie de transport și să se măsoare cu mijloace statistice mutațiile structurale. Din aceste motive, în tabelul 1 sînt prezentate împreună distanțele, în km (d_{ij}), dintre centrele de expediție și centrele de destinație și cantitățile disponibile $\left(\sum_{j=1}^{4} X_{ij}\right)$ și necesare $\left(\sum_{i=1}^{3} X_{ij}\right)$, exprimate în tone, precum și ponderile lor $\sum_{j=1}^{4} Y_{ij}$; $\sum_{i=1}^{3} Y_{ij}$.

Tabelul 1

Centre de destinație / Centre de expediție		s_1	s_2	s_3	s_4	Disponibil	
						absolut	relativ
e_1		60	49	53	48	160	0,32
e_2		62	55	50	65	230	0,46
e_3		47	57	46	59	110	0,22
Necesar	absolut	100	150	120	130	500	1,00
	relativ	0,20	0,30	0,24	0,26	1,00	

Înainte de a stabili planul de transport optim, care să permită minimizarea parcursului mărfurilor exprimat în tone km și respectiv a distanței medii de transport măsurată în km, vom menționa modelul matematic, pentru exemplul considerat. Astfel, vom avea condițiile restrictive pentru:

Mărimi absolute	*Mărimi relative*
$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 160$	$Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} = 0{,}32$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 230$	$Y_{21} + Y_{22} + Y_{23} + Y_{24} = 0{,}46$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 110$	$Y_{31} + Y_{32} + Y_{33} + Y_{34} = 0{,}22$
$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 100$	$Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} = 0{,}20$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 150$	$Y_{12} + Y_{22} + Y_{32} = 0{,}30$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 120$	$Y_{13} + Y_{23} + Y_{33} = 0{,}24$
$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 130$	$Y_{14} + Y_{24} + Y_{34} = 0{,}26$
$X_{ij} \geqslant 0$	$Y_{ij} \geqslant 0$
$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} X_{ij} = 500$	$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} Y_{ij} = 1{,}00.$

De unde se obține funcția de optimizat pentru:
— parcursul mărfurilor (tkm)

$$[\min]\ P_q = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} d_{ij} X_{ij};$$

— distanța medie (km) (1)

$$[\min]\ \bar{D} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} d_{ij} Y_{ij}. \quad (2)$$

Trebuie menționat că rezolvarea celor două variante în paralel necesită un singur tabel cînd se compară distanțele și două tabele cînd sînt repartizate sau transferate cantitățile și respectiv ponderile lor.

Deoarece rezolvarea unei probleme de transport de tipul celei luate în considerare este ușor de realizat, nu vom insista asupra metodelor pentru determinarea soluției inițiale, testarea optimalității și îmbunătățirea soluției.

Soluția inițială corespunzătoare procedeului elementului minim pe coloană are configurația din tabelul 2 (cantități) și din tabelul 3 (ponderi).

Tabelul 2

	s_1	s_2	s_3	s_4
e_1		150		10
e_2			110	120
e_3	100		10	

Tabelul 3

	s_1	s_2	s_3	s_4
e_1		0,30		0,02
e_2			0,22	0,24
e_3	0,20		0,02	

Corespunzător soluției inițiale se obțin următoarele rezultate:
— Parcursul mărfurilor = 26.290 tkm
— Distanța medie de transport = 52,58 km.

Apoi se verifică dacă soluția inițială este optimă și în caz contrar, se va trece la îmbunătățirea ei succesivă, aplicînd metoda distributiv modificată. Pentru aceasta se determină valorile coeficienților U_i și V_j astfel ca

$$U_1 + V_2 = 49 \qquad U_2 + V_4 = 65$$

$$U_1 + V_4 = 48 \qquad U_3 + V_1 = 47$$

$$U_2 + V_3 = 50 \qquad U_3 + V_3 = 46.$$

Prin rezolvarea acestui sistem care cuprinde 6 ecuații liniare și considerînd că $U_1 = 0$ obținem valorile din tabelul 4.

Tabelul 4

V_j / U_i	$V_1 = 34$	$V_2 = 49$	$V_3 = 33$	$V_4 = 48$
$U_1 = 0$	34	49	33	48
$U_2 = 17$	51	66	50	65
$U_3 = 13$	47	62	46	61

Verificarea optimalității se realizează simultan pentru ambele variante, deoarece atît datele absolute, cît și cele relative reflectă aceeași repartiție. Testarea cu ajutorul diferențelor $d_{ij} - (U_i + V_j)$ este prezentată în tabelul 5.

Tabelul 5

26		20	
11	−11		
	−5		−2

Diferența negativă maximă indică posibilitatea îmbunătățirii soluției inițiale prin transferarea unei cantități egale cu valoarea cea mai mică din vîrfurile pare ale ciclului (tabelul 6).

Tabelul 6

	150		10
	θ	110	120
100		10	

	0,30		0,02
	θ	0,22	0,24
0,20		0,02	

Cantitatea transferată este determinată astfel:

θ = minim (150; 120) = 120 t; θ = minim (0,30; 0,24) = 0,24.

După introducerea valorii θ în căsuțele corespunzătoare vîrfurilor impare și scăderea ei din valorile existente în căsuțele pare se obțin valorile din tabelele 7 și 8.

Tabelul 7

	30		130
	120	110	
100		10	

Tabelul 8

	0,06		0,26
	0,24	0,22	
0,20		0,02	

Se poate observa că totalurile pe rînduri și coloane nu diferă de cele existente în tabelul 1. Folosindu-se procedeul cunoscut se verifică optimalitatea noii soluții obținîndu-se valorile din tabelul 9.

Tabelul 9

U_i \ V_j	$V_1 = 45$	$V_2 = 49$	$V_3 = 44$	$V_4 = 48$
$U_1 = 0$	45	49	44	48
$U_2 = 6$	51	55	50	54
$U_3 = 2$	47	51	46	50

Scăzînd valorile date în tabelul 9 din elementele corespunzătoare existente în tabelul 1 rezultă diferențele $d_{ij} - (U_i + V_j)$ prezentate în tabelul 10.

Tabelul 10

15		9	
11			11
	6		9

Deoarece nu există diferențe negative, ultima soluție determinată este optimă.

În continuare sînt prezentate valorile minime ale funcțiilor (1) și (2) Astfel se obține:

— parcursul optim al mărfurilor = 24970 tkm;

— distanța medie optimă de transport = 49,94 km.

Aceste valori sînt mai mici decît cele obținute pentru soluția inițială cu circa 5,021%. Mărimea raportului dintre valoarea soluției optime și valoarea soluției inițiale este determinată de metoda utilizată pentru aflarea soluției inițiale și de datele problemei. Din analiza celor două soluții se mai poate observa cu ușurință că relația statistică $\Sigma P_q = \bar{D}\,\Sigma Q$ existentă între indicatorii: parcursul mărfurilor (ΣP_q), distanța medie ($\bar{D}$) și cantitatea transportată (ΣQ) este verificată de rezultatele obținute.

Datorită constanței distanțelor dintre centre și a cantității totale transportate, singurul factor care determină minimizarea parcursului mărfurilor și a distanței medii este structura cantităților. Indicele modificării parcursului, ca urmare a schimbării structurii sale, are următoarea valoare:

$$I^{Y}_{\Sigma P_q} = \frac{\Sigma D_0 Q_1}{\Sigma Q_1} : \frac{\Sigma D_0 Q_0}{\Sigma Q_0} = \frac{\Sigma D_0 Y_1}{\Sigma D_0 Y_0} = 0{,}94979.$$

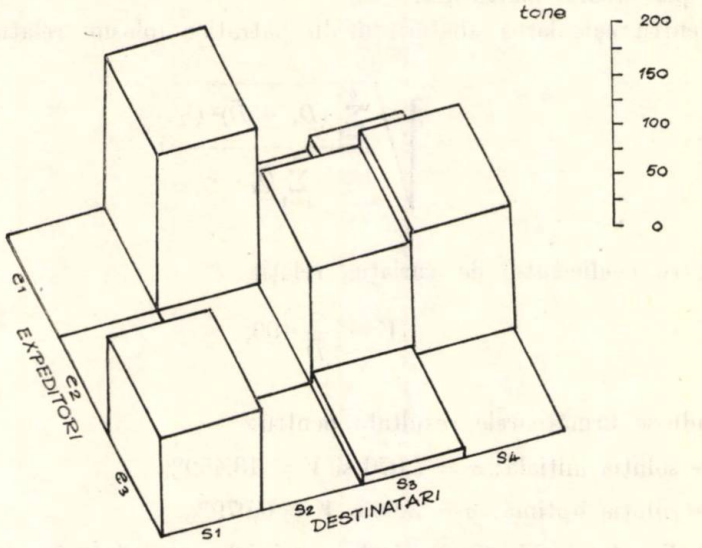
S-au notat cu 0 valorile soluției inițiale și cu 1 valorile soluției optime.

În cazul la care ne referim, îmbunătățirea structurii s-a realizat prin diminuarea cantităților ce urmau să fie transportate pe distanțele de 65 km, 49 km și creșterea cantităților repartizate în căsuțele cărora le corespund distanțele 55 km și 48 km.

Configurația repartiției cantităților între centrele de expediție și centrele de destinație, în cele două soluții, este elocvent redată de stereogramele construite în acest scop (figura 1).

Vom investiga cu ajutorul metodelor consacrate seriilor de frecvențe sensul și intensitatea mutațiilor provocate de optimizare. Considerînd că valorile soluției inițiale și soluției optime pot constitui distribuții, în care distanța (D) este caracteristica, iar cantitatea (Q) semnifică frecvența, se vor calcula: abaterea medie pătratică (σ) și coeficientul de variație (V). Prin

STEREOGRAMA SOLUTIEI INITIALE



STEREOGRAMA SOLUTIEI OPTIME

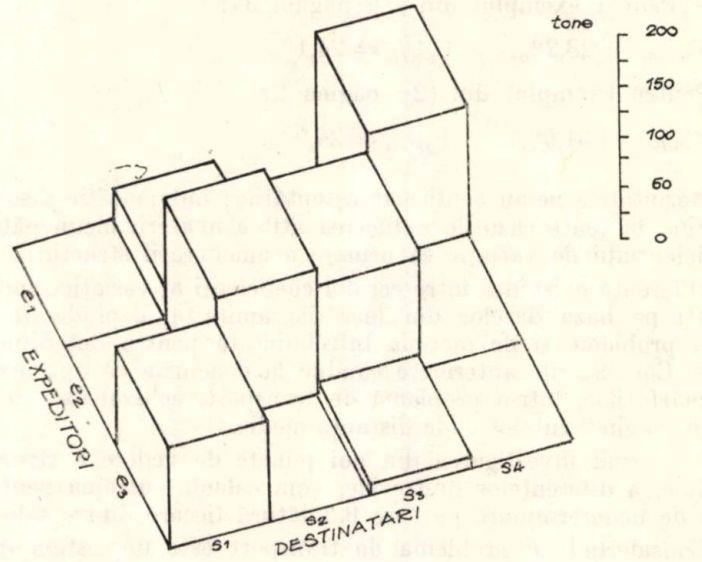


Fig. 1

aceste determinări urmărim să măsurăm variația în jurul distanței medii ($\bar{D}$) inițiale și optime, să caracterizăm din acest punct de vedere efectul minimizării parcursului mărfurilor.

Pentru calcularea abaterii medii pătratice folosim relația:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (D_i - \bar{D})^2 Q_i}{\sum_{i=1}^{6} Q_i}}, \tag{3}$$

iar pentru coeficientul de variație, relația

$$V = \frac{\sigma}{\bar{D}} 100, \tag{4}$$

obținîndu-se următoarele rezultate pentru:

— soluția inițială: $\sigma = 7{,}076$ și $V = 13{,}459\%$

— soluția optimă: $\sigma = 3{,}035$, $V = 6{,}079\%$.

Aplicînd relațiile (3) și (4) la exemplele prezentate în alte lucrări se obțin următoarele rezultate:

— Pentru exemplul din [5], pagina 130:

$V_{inițial} = 49{,}1\%$, $V_{optim} = 47{,}8\%$.

— Pentru exemplul din [7], pagina 34:

$V_{inițial} = 28{,}2\%$, $V_{optim} = 24{,}1\%$.

Pentru exemplul din [2], pagina 28:

$V_{inițial} = 31{,}5\%$, $V_{optim} = 24{,}9\%$.

Rezultatele ne-au confirmat așteptările; îmbunătățirea soluției inițiale determină în toate cazurile reducerea atît a abaterii medii pătratice, cît și a coeficientului de variație ca urmare a ameliorării structurii.

Diferența existentă între cei doi coeficienți ai variației, inițial și optim, calculați pe baza datelor din lucrările amintite, depinde de configurația fiecărei probleme și de metoda întrebuințată pentru determinarea soluției inițiale. Constatările anterioare conduc la concluzia că optimizarea parcursului mărfurilor, într-o problemă de transport, echivalează cu minimizarea abaterii lungimii rutelor de la distanța medie.

Urmărind investigarea din noi puncte de vedere a structurii inițiale și optime, a diferențelor dintre ele, vom calcula entropia pentru a măsura gradul de nedeterminare pe care îl înlătură fiecare dintre soluții.

Considerînd că problema de transport este un sistem închis, putem intui pe baza celui de al doilea principiu al termodinamicii, că procesul

optimizării este însoțit întotdeauna de creșterea entropiei. Evoluția sistemului se produce de la o stare inițială mai puțin probabilă, caracterizată prin neuniformitate către starea optimă mai probabilă cu un grad mai înalt de uniformitate.

Cazul problemei de transport întrunește condițiile formulate în [1], pagina 213, pentru determinarea entropiei:

— suma fracțiilor care formează mulțimea de probabilități trebuie să fie egală cu 1;

— probabilitățile trebuie să depindă numai de starea în care se află sistemul.

Înainte de a trece la calculul entropiei $H = -\sum_{k=1}^{n} P_k \log P_k$ vom mai menționa unele din proprietățile sale, care ne vor ajuta să explicăm rezultatele obținute în cazul avut în vedere [2]:

— egalitatea $H\ (P_1, P_2, ..., P_n) = 0$ se realizează în cazul cînd una din probabilitățile $P_1, P_2, ..., P_n$ este egală cu unitatea, iar celelalte sînt egale cu zero;

— entropia are valoare maximă $H = \log n$ atunci cînd $P_1 = P_2 = ... = P_n$, adică atunci cînd gradul de nedeterminare este maxim.

Dacă luăm în considerare cele două categorii de centre, respectiv centrele de expediție $E(e_1, e_2, e_3)$ și centrele de destinație $S(s_1, s_2, s_3, s_4)$ obținem un sistem complex ES, în care evenimentele elementare (X_{ij}) vor avea probabilitățile $P_{ij} = X_{ij} \Big| \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} X_{ij}$, iar entropia va rezulta din $H(ES) = -\sum_{ij} P_{ij} \log P_{ij}$.

Calcularea entropiei inițiale și optime, folosind probabilitățile date în tabelele 3 și 8, ne conduce la următoarele rezultate:

$$H_{inițial} = 0{,}658, \qquad H_{optim} = 0{,}692.$$

Creșterea entropiei de la soluția inițială la soluția optimă este explicată de atenuarea diferențelor dintre probabilități, ca urmare a transferului efectuat pentru îmbunătățirea reparației.

Problema de transport, confirmă și principiul conform căruia entropia este și o măsură a probabilității ca sistemul să rămînă în starea respectivă. Este evident că în toate cazurile, soluția optimă este cea cu entropia cea mai mare, ea reprezentînd rezultatul final al problemei. Pe această bază, considerăm că entropia, ca și abaterea medie pătratică, poate servi drept criteriu pentru optimizarea transporturilor.

În concluzie, putem afirma că problema de transport se comportă ca un sistem cibernetic, care evoluează către stări tot mai organizate cu ajutorul unor metode fundamentate pe condițiile impuse de relațiile reciproce dintre elementele sale, pentru realizarea cerințelor funcției obiectiv.

BIBLIOGRAFIE

1. ASHBY R. W.: *Introducere în cibernetică*. Editura tehnică, Bucureşti, 1972.
2. AURIAN J., BOLDUR GH., LAZĂR S.: *Cercetarea operaţională în construcţii*. Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1967.
3. BENEŞ J.: *Sisteme cibernetice cu organizare automată*. Editura tehnică, Bucureşti, 1971.
4. CIUCU G., CRAIU V., SĂCUIU I.: *Culegere de probleme de teoria probabilităţilor*. Editura tehnică, Bucureşti, 1967.
5. MĂNESCU M., MĂCRIS A., DUMITRU V.: *Metode matematice moderne aplicate în organizarea şi planificarea lucrărilor de construcţii şi montaje*. Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1969.
6. MARTEŞ G.: *Aspecte ale automatizării conducerii forţelor şi mijloacelor*. Editura militară, Bucureşti, 1970.
7. NĂDEJDE I., BERGTHALLER C., ZIDĂROIU C., SBURLAN S.: *Probleme de cercetare operaţională*. Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1971.
8. VIŞINOIU N.: *Statistica transporturilor*. Culegere de probleme, A.S.E., Bucureşti, 1971.

4.IX.1975

GEORGIA HERA
Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

ARGENTINA FILIP
Catedra de matematică — A.S.E.

Model de așteptare cu intensități diferite de servire

Autorii analizează cazul particular (pentru $S = 2$) al modelului $M/M/S$ cu S stații de servire cu parametri de servire diferiți. Ne propunem să elaborăm o metodă care să permită ușurarea calculelor și să mărească precizia aplicației.

Modelele de așteptare au fost analizate, în majoritatea cazurilor, avînd în vedere mai multe stații de servire în paralel, cu intensități de servire egale pentru toate stațiile. Această ipoteză, în realitate, are loc rar. Dacă în aparență această problemă poate fi neglijată, de exemplu în cazul caselor de la magazinele de autoservire, în cazul unor procese de producție cu tehnicitate și vechime diferită a parcului de mașini, modelul M/M/S cu intensități de servire egale nu mai corespunde.

În astfel de cazuri nu se poate lucra cu acceptarea simplificată a intensităților egale de servire a tuturor stațiilor.

Scopul acestui articol este de a analiza modelul de așteptare M/M/S cu $S = 2$ stații de servire în paralel, cu intensități de serviciu μ_1, respectiv μ_2; $\mu_1 \neq \mu_2$. Schematic modelul se va prezenta ca în figura 1.

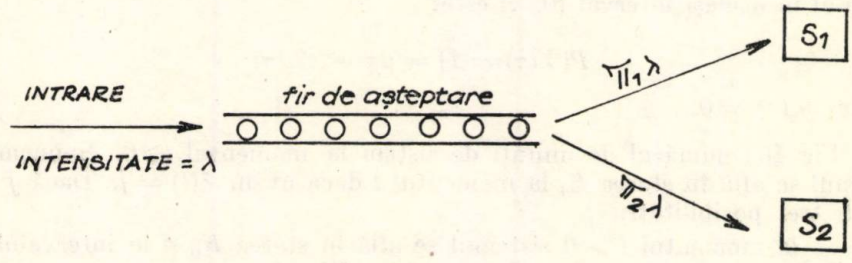


Fig. 1

Considerăm că o unitate sosește în sistemul de așteptare într-un moment în care nu se află nici o altă unitate în sistem. Această unitate are deci libertate de alegere între cele două stații de servire și se va decide cu probabilitatea π_i pentru stația S_i, $i = 1, 2$. Avem deci:

$$0 \leqslant \pi_i \leqslant 1, \qquad i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^{2} \pi_i = 1.$$

Pot apare următoarele situații:

a) $\mu_1 > \mu_2$ și $\pi_1 > \pi_2$.

În acest caz unii clienți, cunoscînd intensitățile de servire ale stațiilor au preferințe pentru stațiile care servesc mai rapid.

b) $\mu_1 > \mu_2$ și $\pi_1 < \pi_2$.

Avem de-a face în această situație cu o alegere în care clienții preferă de pildă calitatea serviciilor și nu rapiditatea rezolvării.

Cazul extrem $\pi_1 = 1$ (respectiv $\pi_2 = 1$) reprezintă situația în care toți clienții se decid pentru stația S_1 (respectiv S_2), dacă au posibilități de alegere.

ECUAȚIILE DE STARE ALE MODELULUI

Ecuațiile de stare se obțin în același fel ca și la modelul M/M/S. Se pune problema de a deosebi cazuri în plus, care corespund alegerii stațiilor. Notăm:

p_{10} — probabilitatea că o unitate se află în sistem în stația de servire S_1;
p_{01} — probabilitatea că o unitate se află în sistem în stația S_2.

Fie $X(t)$ numărul unităților care intră în sistem în intervalul de timp $(0, t]$ și $Y(t)$ — numărul unităților servite care părăsesc sistemul în intervalul $(0, t]$. Se știe că în cazul sistemului cu o singură stație, probabilitatea $p[X(\tau) = 1]$ ca în intervalul de timp $(0, \tau]$ să intre o unitate în sistem este dată de:

$$P[X(\tau) = 1] = \lambda\tau + \tau\theta_1(\tau) \tag{1}$$

unde $\lim_{\tau \to 0} \theta_1(\tau) = 0$, și că probabilitatea ca o unitate servită să părăsească sistemul în același interval $(0, \tau)$ este:

$$P[Y(\tau) = 1] = \mu\tau + \tau\theta_2(\tau) \tag{2}$$

cu $\lim \theta_2(\tau) = 0$.

Fie $\xi(t)$ numărul de unități de sistem la momentul $t \geqslant 0$. Spunem că sistemul se află în starea E_j la momentul t dacă avem $\xi(t) = j$. Dacă $j = 0$ există trei posibilități:

— la momentul $t > 0$ sistemul se află în starea E_0 și în intervalul, de timp $(t, t + dt]$, $dt > 0$, nu apare nici o intrare;

— la momentul $t > 0$, sistemul se află în starea E_1, iar în intervalul de timp $(t, t + dt]$, $dt > 0$, nu sosește nici o unitate, iar unitatea existentă este servită de stația S_1;

— la momentul $t > 0$ sistemul se află în starea E_1, iar în intervalul $(t, t + dt]$, $dt > 0$, nu sosește nici o unitate și unitatea existentă este servită de stația S_2.

Vom avea deci:

$$p_0(t + dt) = (1 - \lambda\, dt)\, p_0(t) + \mu_1\, p_{10}(t) + \mu_2\, p_{01}(t). \tag{3}$$

Considerăm acum cazul $j = 1$. Această unitate se poate afla în sistem în stația S_1 cu probabilitatea p_{10}, sau se poate afla în sistem în stația S_2 cu probabilitatea p_{01}. Vom explicita cazul cînd unitatea este servită de prima stație. Pot exista următoarele situații:

— la momentul t, $(t > 0)$, sistemul se află în starea E_1, iar în intervalul de timp $(t, t + dt)$, $dt > 0$ nu are loc nici o intrare și nici o ieșire din sistem;

— la momentul t, $(t > 0)$, sistemul se află în starea E_0 și în intervalul $(t, t + dt)$, $dt > 0$, intră o unitate în sistem și nu are loc nici o plecare;

— la momentul t, $(t > 0)$, sistemul este în starea E_2, iar în intervalul de timp $(t, t + dt]$ unitatea este servită de stația S_1 (unitatea părăsind imediat sistemul) și nu intră nici o unitate în sistem.

Vom obține astfel:

$$p_{10}(t + dt) = [1 - (\lambda + \mu_1)\, dt]p_{10}(t) + \mu_2\, p_2(t)\, dt + \pi_1\, \lambda p_0(t)dt. \tag{4}$$

Cînd $j = 1$, dar unitatea alege stația S_2, vom obține, printr-un raționament analog, ecuația:

$$p_{01}(t + dt) = [1 - (\lambda + \mu_2)\, dt]p_{01}(t) + \mu_1\, p_2(t)\, dt + \pi_2\, \lambda p_0(t)\, dt. \tag{5}$$

Pentru $j \geqslant 2$, ecuațiile de stare coincid cu cele ale modelului M/M/S, adică vom avea:

$$p_j(t + dt) = [1 - (\lambda + \mu)\, dt]\, p_j(t) + \mu p_{j+1}(t)\, dt + \lambda p_{j-1}(t)\, dt. \tag{6}$$

unde: $\mu = \mu_1 + \mu_2$;

$$p_1(t) = p_{10}(t) + p_{01}(t). \tag{7}$$

Am obținut deci ca ecuații de stare ale modelului cu două stații cu intensități diferite de servire, următoarele:

$$n = 0: p_0(t + dt) = (1 - \lambda dt)\, p_0(t) + \mu_1 p_{10}(t)\, dt + \mu_2 p_{01}(t)\, dt$$

$$n = 1 : \begin{cases} p_{10}(t + dt) = [1 - (\lambda + \mu)\, dt]\, p_{10}(t) + \mu_2 p_2(t)\, dt + \pi_1 \lambda p_0(t)\, dt \\ p_{01}(t + dt) = [1 - (\lambda + \mu)\, dt]\, p_{01}(t) + \mu_1 p_2(t)\, dt + \pi_2 \lambda p_0(t)\, dt \end{cases} \tag{8}$$

$$n \geqslant 2 : p_j(t + dt) = [1 - (\lambda + \mu)\, dt]p_j(t) + \mu p_{j+1}(t)\, dt + \lambda p_{j-1}(t)\, dt.$$

Dacă fenomenul este staționar ($p_n(t) \to p_n$), vom obține următoarele ecuații de stare:

$$\begin{aligned}
&\lambda p_0 = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01} \\
&(\lambda + \mu_1) p_{10} = \mu_2 p_2 + \pi_1 \lambda p_0 \\
&(\lambda + \mu_2) p_{01} = \mu_1 p_2 + \pi_2 \lambda p_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(\lambda + \mu)\, p_n = \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1}, \qquad n \geqslant 2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Introducînd intensitatea de trafic:

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} \tag{10}$$

și făcînd calculele corespunzătoare obținem:

$$p_{10} = \frac{\psi}{1 + 2\psi} \cdot \frac{\mu}{\mu_1} \cdot (\psi + \pi_1)\, p_0$$

$$p_{01} = \frac{\psi}{1 + 2\psi} \cdot \frac{\mu}{\mu_2} \cdot (\psi + \pi_2)\, p_0$$

$$p_1 = \frac{\psi}{1 + 2\psi} \cdot \frac{\mu}{\mu_2} \left(1 + \frac{\mu}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\, \pi_1\right) p_0 \tag{11}$$

$$p_2 = \frac{\psi^2}{1 + 2\psi} \cdot \frac{\mu}{\mu_2} \left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\, \psi + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\, \pi_1\right) p_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = \frac{\psi^n}{1 + 2\psi} \cdot \frac{\mu}{\mu_2} \left(1 + \frac{\mu}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\, \pi_1\right) p_0, \quad n \geqslant 2.$$

Din condiția $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, obținem pentru p_0 expresia:

$$p_0 = \frac{1 - \psi}{1 + \dfrac{\psi}{1 + 2\psi} \cdot \dfrac{\mu_1}{\mu} \left[1 + \left(1 + \dfrac{\mu_2^2}{\mu_2^1}\right)\psi - \left(1 - \dfrac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right)\pi_1\right]}. \tag{12}$$

Astfel, modelul este complet definit deoarece toate probabilitățile, p_n depind de p_0.

Pentru a obține de exemplu, probabilitatea ca în sistem să existe așteptare, $p(W > 0)$, observăm că:

$$P(W > 0) = P(n \geqslant 2) - 1 - (P_0 + p_{10} + p_{01}). \tag{13}$$

Introducînd notaţiile:

$$\alpha = 1 + \frac{\mu}{\mu_1}\psi + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\pi_1$$

$$\beta = \frac{\mu_2}{\mu_1}(1 + 2\psi) + \psi\left[1 + \left(1 + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right)\psi - \left(1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right)\pi_1\right], \tag{14}$$

$$\gamma = 1 + \frac{\psi}{1 + 2\psi} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2}\left[1 + \left(1 + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right)\psi - \left(1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right)\pi_1\right]$$

obţinem:

$$p(W > 0) = \psi^2 \cdot \frac{\mu}{\mu_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}. \tag{15}$$

Din relaţiile:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n, \quad \bar{\gamma} = \sum_{n=3}^{\infty} (n - 2)\, p_n \tag{16}$$

vom găsi:

$$\bar{n} = \frac{\psi}{1 - \psi} \cdot \frac{\mu}{\mu_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}; \quad \bar{\gamma} = \frac{\psi^3}{1 - \psi} \cdot \frac{\mu}{\mu_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}. \tag{17}$$

În mod asemănător se pot determina şi alte caracteristici ale modelului.

BIBLIOGRAFIE

1. TAKACZ L.: *Introduction to the theory of queues.* Oxford, University Press, 1962.
2. KAUFMANN A., CRUON R.: *Les phénomènes d'attente.* Paris, Dunod, 1961.
3. PRABHU N. U., BHOT U. N.: *Further results for the queue with Poissons arrivals.* Operation Research, 11, 1963.
4. MIHOC GH., CIUCU G., MUJA ANETA: *Modele matematice ale aşteptării.* Editura Academiei R.S.R., 1973.

26.XII.1975

Gh. Boldur-Lăţescu, Gh. Ciobanu, I. Băncilă

CARTEA ANALISTULUI DE SISTEME

Editura ştiinţifică şi enciclopedică,
Bucureşti, 1976

Cartea analistului de sisteme este o lucrare de sinteză, în care autorii îşi propun prezentarea principalelor metode ale unei profesiuni noi, care, după cum arată autorii, deşi nu este oficializată prin diplome universitare, se practică intens, pe scară largă şi cu mare eficienţă, în toate ţările dezvoltate din punct de vedere economic. Caracterul de sinteză al lucrării se datoreşte domeniului extrem de vast pe care îl acoperă această profesiune. Astfel, începînd cu metodologiile de analiză şi proiectare informaţional-decizională, continuînd cu metodele cercetării operaţionale şi cele ale informaticii, în domeniul analizei de sistem intră o serie de procedee împrumutate din cibernetică, teoria generală a sistemelor şi chiar din psihosociologie. Tuturor acestor metode lucrarea le consacră capitole speciale, în care analistul, începător sau avansat, poate găsi principalele idei şi tehnici ale profesiunii.

Efortul de sinteză al autorilor este deosebit, dar au rezultat şi unele tratări neechilibrate şi chiar unele omisiuni. Astfel, apreciem că spaţiul acordat metodelor psihosociologice este prea mic în economia generală a lucrării, după cum considerăm că ar fi trebuit introduse şi elemente de analiză la nivel macroeconomic. Lipsa acestora din urmă ne determină, însă, să considerăm că autorii şi-au orientat lucrarea exclusiv spre analiza sistemelor la nivelul întreprinderii.

Cu tot caracterul său de manual, cartea cuprinde o serie de idei originale ale autorilor, rezultat al activităţii de cercetare şi aplicare practică în domeniul analizei sistemelor. Astfel, cu totul remarcabilă este sistematizarea metodologiilor de analiză şi proiectare informaţional decizională. Prezentînd o metodologie proprie, în care analiza şi proiectarea sînt subordonate obiectivelor de bază ale sistemului analizat, autorii fac totodată o critică a metodologiilor depăşite, cum sînt cele pentru simplificarea documentelor, precum şi a viziunilor unilaterale exclusiv orientate spre dotarea cu tehnică de calcul, din unele metodologii de analiză şi proiectare a sistemelor informatice.

O altă idee originală este evidenţierea faptului că analiza şi proiectarea informaţional-decizională realizează pe cale neanalitică exact ceea ce îşi propune să descrie o funcţie de transfer a unui sistem: stabileşte corespondenţe dintre intrările informaţionale şi ieşirile informaţionale subordonate realizării obiectivelor sistemului.

În afara celor arătate mai sus, am putea arăta şi alte calităţi ale lucrării cum ar fi informaţia bibliografică amplă, stilul clar, numeroasele exemple practice.

Conchidem că e vorba despre o lucrare remarcabilă, de mare utilitate pentru toţi cei care lucrează în managementul ştiinţific.

E. Ţigănescu

AL. ISAIC-MANIU
Catedra de cibernetică economică — A.S.E.
V. BĂDIN
Catedra de matematică — A.S.E.

Metoda statistică de verificare a omogenității loturilor de produse

Planurile de sondaj de recepție utilizate în practica curentă, se bazează pe indicatorul „medie". Acest fapt determină ca procedurile de sondaj să preia o parte din deficiențele acestui indicator în caracterizarea unei populații. Metoda propusă, pornind de la principiile controlului dispersiei, oferă o procedură operațională, practică și eficientă de recepție. Avantajul principal al metodei constă într-o mare capacitate de diferențiere, nu numai a loturilor corespunzătoare de cele necorespunzătoare, ci și a loturilor omogene de cele neomogene calitativ. Se prezintă și o aplicație concretă.

Metodele de verificare a calității loturilor de produse cu caracteristici măsurabile, utilizate în prezent, se bazează în construcția lor pe parametrul statistic *medie*. Acesta este motivul pentru care sînt preluate, în caracterizarea unei populații, o serie de deficiențe ale acestui indicator statistic, estompînd variațiile individuale și prezentînd o stare nivelată, o stare medie a populației.

Se știe că în procesul de producție acționează cauze întîmplătoare și sistematice care provoacă variații ale caracteristicilor calitative ale produselor. Aceste variații pot atinge valori considerabile în intervale de timp relativ reduse, fapt ce conduce în final la formarea unor loturi de produse eterogene din punctul de vedere al caracteristicilor calitative individuale. Utilizarea metodelor actuale de control de recepție, în cazul unor asemenea loturi eterogene, nu face posibilă semnalarea abaterilor individuale ale calității produselor de la valorile prescrise, astfel că loturile pe baza judecății „în medie" vor fi declarate acceptabile.

Metoda propusă acordă rolul principal parametrului statistic de împrăștiere, fapt ce-i conferă un plus de sensibilitate în măsurarea omogenității performanțelor calitative ale produselor ce compun lotul controlat.

Parametrul statistic „medie" apare și în cadrul acestei metode, dar numai ca element pentru calculul dispersiei eșantionului, avînd deci un rol auxiliar.

În cele ce urmează vom prezenta procedeul secvențial de verificare a omogenității loturilor de produse *.

În cadrul acestui procedeu, vom expune două variante de eșantionare și anume:

a) varianta secvențială de control prin probe individuale;

b) varianta secvențială de control prin probe multiple.

În ambele variante vom presupune caracteristica controlată a produselor care alcătuiesc lotul drept o caracteristică măsurabilă și că repartiția acesteia în lot este normală $N(m, \sigma^2)$.

a) CONTROLUL SECVENȚIAL PRIN PROBE INDIVIDUALE

Așa cum am presupus, repartiția caracteristicii X supusă controlului este normală $N(m, \sigma^2)$, m și σ^2 fiind respectiv media și dispersia caracteristicii în lot. Un lot se consideră corespunzător dacă

$$\sigma^2 \leqslant \sigma_1^2 \tag{1}$$

și necorespunzător dacă

$$\sigma^2 \geqslant \sigma_2^2 \tag{2}$$

σ_1^2 și σ_2^2 fiind două limite ale împrăștierii parametrului de calitate, stabilite în prealabil. Ele se mai numesc și valoare admisă (σ_1^2) și valoare tolerată (σ_2^2) ale indicatorului statistic al împrăștierii.

Fie ipoteza $\mathbf{H}_0$: $\sigma^2 \geqslant \sigma_1^2$ cu alternativa $\mathbf{H}_1$: $\sigma^2 \geqslant \sigma_2^2$ unde $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

Eșantionul de volum n extras din lot, ne conduce la valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ale caracteristicii X, pe baza cărora determinăm dispersia eșantionului

$$s_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

unde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_i$ este media de sondaj care estimează media m în cazul că este necunoscută. Raportul secvențial care compară ipotezele $\mathbf{H}_0$: $\sigma^2 \leqslant \sigma_1^2$ și $\mathbf{H}_1$: $\sigma^2 \geqslant \sigma_2^2$ ($\sigma_2^2 > \sigma_1^2$) se obțin pe baza sondajului, făcînd raportul probabilităților P_{2n} și P_{1n}, unde

$$P_{1n} = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}.$$

și

$$P_{2n} = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}. \tag{3}$$

---

* Un procedeu de verificare a omogenității loturilor prin metoda sondajului simplu cu ajutorul dispersiei și amplitudinii a fost prezentat în [1].

Prin urmare raportul secvențial este

$$\gamma_n = \frac{P_{2n}}{P_{1n}} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}. \tag{4}$$

Dacă media este necunoscută, atunci ea este estimată de media sondajului $\bar{x}$, și atunci în (4) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$ se înlocuiește cu $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (n-1)\,s^2$, iar n prin $n-1$ și raportul devine:

$$\gamma_n = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{n-1} e^{-\frac{(n-1)s^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)}. \tag{5}$$

Conform testului secvențial al lui Wald, condiția de acceptare a ipotezei $\mathbf{H}_0$, deci de acceptare a lotului cercetat, este

$$\gamma_n \leqslant B \tag{6}$$

unde $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Condiția de respingere a ipotezei $\mathbf{H}_0$, adică de respingere a lotului, este

$$\gamma_n \geqslant A \tag{7}$$

unde $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$, iar condiția de continuare a probelor este

$$B < \gamma_n < A, \tag{8}$$

α și β fiind respectiv riscul furnizorului și riscul beneficiarului.

Ținînd seama de (5) și (6) condiția de acceptarea lotului se scrie succesiv:

$$\ln \gamma_n \leqslant \ln B,$$

sau

$$(n-1)\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{(n-1)s^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) \leqslant \ln B$$

de unde în final, trecînd la logaritmii zecimali obținem:

$$(n-1)s^2 \leqslant \frac{4{,}606 \log B}{\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}} + \frac{2{,}303 \log \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}}(n-1)$$

sau

$$(n-1)\,s^2 \leqslant h_1 + h_3(n-1) \tag{9}$$

în care

$$h_1 = \frac{4{,}606 \log B}{\sigma^{-2}_1 - \sigma^{-2}_2}; \quad h_3 = \frac{2{,}303 \log \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}{\sigma^{-2}_1 - \sigma^{-2}_2}. \tag{10}$$

Ținînd seama de (5) și (7) se obține în mod analog condiția de respingere a lotului care este

$$(n-1)s^2 \geqslant \frac{4{,}606 \log B}{\frac{1}{\sigma_1^1} - \frac{1}{\sigma_2^2}} + \frac{2{,}303 \log \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}} (n-1)$$

sau

$$(n-1)s^2 \geqslant h_2 + h_3(n-1) \tag{11}$$

unde

$$h_2 = \frac{4{,}606 \log A}{\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}}. \tag{12}$$

Condiția de continuare a probelor, dedusă din relația (8) se scrie:

$$h_1 + h_3(n-1) < (n-1)s^2 < h_2 + (n-1)h_3. \tag{13}$$

Inegalitățile (9), (11) și (13) definesc prin urmare regiunea de acceptare, respingere și respectiv de continuare a controlului și lotul se acceptă, se respinge sau sondajul continuă după cum mărimea $(n-1)s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2$ satisface relațiile (9), (11) sau (13).

Numărul mediu de produse controlate pînă la luarea deciziei de acceptare a lotului este:

$$M(n/\sigma_1) = \frac{h_2 + (1-\alpha)(h_1 - h_2)}{\sigma_1^2 - h_3}. \tag{14}$$

Numărul mediu de produse controlate pînă la respingerea lotului este

$$M(n/\sigma_2) = \frac{h_2 + \beta(h_1 - h_2)}{\sigma_2^2 - h_3}, \tag{15}$$

iar numărul mediu maxim de probe pînă la luarea unei decizii, oricare ar fi ea, este [2]:

$$M(n)_{max} = -\frac{h_1 h_2}{2h_3^2}. \tag{16}$$

b) CONTROLUL SECVENȚIAL BAZAT PE PROBE MULTIPLE

Pornind de la planul secvențial pentru verificarea omogenității loturilor de produse din punctul de vedere al fiabilității pe baza dispersiei, posibilitate evidențiată în [3], vom extinde procedeul secvențial prin alcătuirea unui plan de sondaj multiplu în care controlul se efectuează prin probe mici, repetate.

Spre deosebire de cazul precedent, controlul nu se face bucată cu bucată, ci se efectuează prin sondaje de volume egale sau diferite, valorile obținute în fiecare sondaj fiind

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n_1} \\ x_{21}, & x_{22}. & \ldots, & x_{2n_2} \\ \vdots & & & \\ x_{r1}, & x_{r2}, & \ldots, & x_{rn_r} \end{matrix}$$

iar $n_1, n_2, \ldots, n_r$ sînt volumele celor r sondaje.

Fie $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_r^2$ dispersiile nedeplasate ale sondajelor date de relația

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{17}$$

unde $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, r$ sînt mediile de sondaj luate ca estimații ale mediei m.

Raportul secvențial care compară ipotezele $\mathbf{H}_0$: $\sigma^2 \leqslant \sigma_1^2$ și $\mathbf{H}_1$: $\sigma^2 \geqslant \sigma_2^2 > \sigma_1^2$ se obține în urma celor r sondaje, făcînd raportul probabilităților P_{2r} și P_{1r}, unde

$$P_{2r} = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{n_i} \left[\frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_2}\right)^2} \right] \tag{18}$$

și

$$P_{1r} = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{n_i} \left[\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_1}\right)^2} \right]. \tag{18'}$$

Ținînd seama de valorile P_{2r} și P_{1r}, raportul secvențial este

$$\gamma_n = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{\sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right] \sum_{i=1}^{r} S_i^2 (n_i - 1)} . \tag{19}$$

Procedînd ca în cazul precedent și punînd $k_i = n_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$, pentru regiunea de respingere a lotului avem succesiv:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) \sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \leqslant \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

sau

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \geqslant \frac{2}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + \frac{2 \sum_{i=1}^{r} k_i \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}}$$

și punînd

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{20}$$

obținem condiția de respingere a lotului și anume

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \geqslant \frac{2\ln A}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} + \frac{\ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} \sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{21}$$

În mod analog se obține condiția de acceptare a lotului:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \leqslant \frac{2\ln B}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} + \frac{\ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} \sum_{i=1}^{r} k_i. \tag{22}$$

Trecînd în logaritmii zecimali, condițiile (21) și (22) devin:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \geqslant \frac{4{,}606 \log A}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} + \frac{2{,}303 \log \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} \sum_{i=1}^{r} k_i. \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \leqslant \frac{4{,}606 \log B}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} + \frac{2{,}303 \log \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}{\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}} \sum_{i=1}^{r} k_i. \tag{24}$$

Folosind relațiile de la punctul precedent, condițiile de respingere, de acceptare și de continuare a probelor se scriu:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \geqslant h_2 + h_3 \sum_{i=1}^{r} k_i; \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \leqslant h_1 + h_3 \sum_{i=1}^{r} k_i; \tag{26}$$

$$h_1 + h_3 \sum_{i=1}^{r} k_i < \sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 < h_2 + h_3 \sum_{i=1}^{r} k_i. \tag{27}$$

Se observă analogia evidentă dintre condițiile obținute în acest caz cu cele de la cazul precedent.

EXEMPLU

Ilustrăm metoda propusă prin utilizarea ei concretă la controlul omogenității unor loturi de motoraşe electrice pentru aparatura de uz casnic. Caracteristica de calitate urmărită este cîmpul perturbator măsurat în dB [4]. Considerente de natură teoretică referitoare la caracteristicile de calitate cuantificabile ca volumul mare al măsurătorilor ce s-au efectuat, precum și modul de evoluție al valorilor conduc la aprecierea că repartiția cîmpului

perturbator este normală (din motive de spațiu nu testăm analitic această ipoteză de lucru).

Prima operație constă în estimarea valorilor admise și tolerate ale indicatorilor statistici de împrăștiere σ_1 și σ_2.

Estimarea valorii admise σ_1 a indicatorului împrăștierii s-a efectuat pe baza a 420 de măsurători ale nivelului cîmpului perturbator (în dB), în 10 sondaje. Rezultatele măsurătorilor, sub formă de abateri de la constanta 40 sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. de ordine al încercării	Sondajul ($i = 1, 2, \ldots, 10$)							$x'_i = x_i - c$, $c = 40$		
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	− 4	−12	−12	−12	−12	−10	− 3	− 7	7
2	5	−12	−12	−12	−12	− 9	−12	−10	10	0
3	2	− 8	−12	−12	−12	−12	−11	−12	3	0
4	− 9	−12	−12	−12	−12	−12	−14	− 4	10	− 5
5	6	−12	−12	−12	+12	−12	−12	−10	− 7	− 5
6	−11	−12	−12	−12	−12	−12	− 9	−12	+ 1	5
7	− 8	− 9	−15	−18	− 2	−13	−13	− 7	− 6	− 1
8	− 6	−18	−13	−18	−11	−14	−13	− 9	− 5	5
9	13	− 7	−18	−11	−10	− 8	−13	− 6	−12	5
10	−15	−18	−18	−12	−15	−14	−13	− 7	− 9	− 9
11	−13	− 8	−18	−18	− 6	−15	−13	− 6	− 6	0
12	−13	−13	−10	−18	− 2	−12	−13	− 8	− 8	7
13	−19,5	−20,5	−24,5	−19,5	−12,5	−13,5	−20,5	− 3,5	0,5	1,5
14	−18,5	−18,5	−15,5	−24,5	−15,5	−11,5	−23,5	− 6,5	− 2,5	− 4,5
15	−20,5	−18,5	−24,5	−23,5	− 0,5	− 8,5	−20,5	1,5	− 2,5	− 8,5
16	− 5,5	−20,5	−24,5	− 9,5	−10,5	−11,5	−24,5	− 3,5	− 1,5	− 8,5
17	−12,5	−22,5	0,5	− 4,5	−19,5	−10,5	−22,5	− 0,5	0,5	− 8,5
18	3,5	−14,5	− 1,5	− 5,5	− 8,5	−13,5	−22,5	1,5	− 2	− 0,5
19	16,2	− 2,8	− 4,8	− 1,5	0,2	−10,8	−11,8	2,2	− 0,8	− 1,8
20	8,2	1,2	− 9,8	−22,8	−12,8	−12,8	− 8,8	0,2	4,2	13,2
21	− 4,8	5,2	0,2	− 4,8	− 3,8	−12,8	− 4,8	2,2	− 1,8	0,2
22	4,2	0,2	0,2	−2,8	− 5,8	−15,8	−11,8	2,2	− 3,8	−16,8
23	9,2	9,2	− 1,8	− 6,8	− 9,8	−14,8	−10,8	− 1,2	1,5	5,2
24	1,8	2,2	− 4,8	− 7,8	− 6,8	17,8	− 3,8	0,2	− 0,5	11,5
25	13	1,4	− 4,6	− 4,6	−14,6	− 9,6	− 3,6	2,4	0,5	− 4,6
26	0,1	9,6	− 4,6	− 4,6	−12,6	−14,6	− 6,6	0,6	− 1,8	− 9,6
27	− 6,6	8,4	− 1,6	− 7,6	− 4,6	− 8,6	− 2,6	1,4	1,5	− 9,6
28	− 2,6	4,6	− 1,6	5,4	− 5,6	−14,6	0,4	− 1,4	− 2,6	− 9,6
29	3,4	7,4	3,4	− 2,6	− 5,6	−11,6	3,4	− 0,6	− 0,5	− 9,6
30	0,4	8,4	2,4	−13,6	− 5,6	−14,6	0,4	0,4	− 1	− 0,6
31	8	−10	−13	−13	−13	−13	10	4	3	−16
32	1	−13	−13	−13	−13	−13	− 9	6	− 1,6	−16
33	− 6	− 7	− 2	− 5	−10	− 9	− 7	− 1	3	−16
34	− 7	− 8	− 2	+ 5	−13	−13	−10	− 6	− 3	−16
35	−13	−11	− 2	− 7	−13	−13	− 8	− 1	0	−16
36	− 3	− 3	− 3	−13	−13	−13	−10	− 4	0	− 6
37	− 3,6	− 8,6	− 9,6	− 8,6	− 9,6	− 9,6	− 9,6	4,4	0,4	− 4,6
38	− 9,6	− 9,6	− 9,6	− 7,6	− 9,6	− 9,6	− 7,6	− 1,6	0,4	− 5,6
39	− 5,6	− 3,6	− 9,6	− 9,6	− 9,6	− 9,6	− 4,6	2,4	0,4	− 5,6
40	− 9,6	− 4,6	− 9,6	0,4	− 7,6	− 4,6	− 9,6	4,4	0,4	− 4,6
41	− 9,6	− 8,6	− 9,6	− 9,6	− 9,6	− 9,6	− 9,6	− 0,6	0,4	− 5,6
42	− 2,5	− 9,6	− 9,6	− 2,6	− 8,6	− 9,6	− 8,6	2,4	0,4	− 5,6

Vom calcula estimatorul dispersiei admise pe baza dispersiilor de sondaj s_i^1.

Pentru a avea certitudinea justeței estimării valorii σ^2 prin valorile de sondaj vom testa, mai întîi omogenitatea celor 10 dispersii de sondaj cu ajutorul testului Bartlett. Acest test se stabilește pentru ipoteza $\mathbf{H}_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$, regiunea critică $B > \chi^2_{\alpha;k-1}$, unde B este statistica definită de relația:

$$\chi^2 = \frac{2{,}3016}{C}\left[f \lg \bar{S}^2 - \sum_{i=1}^{k} f_i \lg S_i^2\right] \tag{28}$$

în care:

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f}\right), \tag{29}$$

$f = \sum_{i=1} f_i$ suma numerelor gradelor de libertate,

k — numărul sondajelor,

$\bar{S}^2$ — media dispersiilor celor 10 sondaje (92,50; 78,70; 54,75; 48,12; 18,35; 21,40; 32,29; 21,83; 18,25; 57,36), medie calculată cu formula:

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} S_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{10} f_i}.$$

Efectuînd calculele necesare, rezultă $C = 1{,}00894$, $\bar{S}^2 = 44{,}355$ și $\chi^2 = 67{,}445$.

Întrucît $\chi^2_{calc} > \chi^2_{99,95;9} = 29{,}7$ nu putem accepta ipoteza referitoare la egalitatea dispersiilor celor 10 sondaje. Este necesar să eliminăm dispersiile ce se abat puternic, scop în care utilizăm testul Cochran, care folosește statistica

$$G = \frac{max\, S_i^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_k^2} \tag{30}$$

a cărei valoare se compară cu o valoare tabelară corespunzătoare. Aplicînd succesiv testul pentru dispersiile care se abat semnificativ de la valorile șirului vom elimina S_1^2, S_2^2. Valoarea testului pentru S_{10}^2 este inferioară mărimii tabelare corespunzătoare. Drept urmare această dispersie nu se mai elimină din șir.

Deci, putem estima pe σ_1^2 cu media celor 8 dispersii rămase:

$$\sigma_1^2 \approx \tilde{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{1}^{\infty} s_i^2}{8} = 34{,}043.$$

Mărimea dispersiei tolerate σ_2^2 o vom estima pe baza a patru sondaje din producția necorespunzătoare. Rezultatele celor 168 măsurători exprimate în abateri față de constanta 40 ($x_i' = x_i - 40$), sînt prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2

Nr. ord. încercare	Sondajul $i = 1, 2, \ldots 42$			$x_i' = x_i - c$ $c = 40$
j \ i	1	2	3	4
1	− 1	− 9	8	8
2	8	−12	− 2	14
3	− 4	4	− 7	− 3
4	− 7	− 4	− 9	− 6
5	− 2	−10	− 5	− 3
6	− 7	− 5	− 4	8
7	− 5	− 7	− 1	− 1
8	7	−10	10	11
9	− 9	+ 6	−12	− 5
10	2	−12	−13	− 6
11	− 3	−13	−12	− 5
12	−15	−13	−11	− 1
13	−15,5	− 8,5	4,5	5,5
14	4,5	− 7,5	−20,5	8
15	−20,5	7,5	−23,5	− 2,5
16	4,5	− 8,5	−24,5	− 6
17	4,5	− 9,5	−17,5	− 2,5
18	− 9,5	− 8,5	− 0,5	4,5
19	2,2	− 2,8	10,2	8,2
20	14,2	− 4,8	−10,8	9
21	− 2,8	11,2	−11,8	4,5
22	13,2	− 4,8	−10,8	− 5
23	2,2	− 7,8	−11,8	− 2,6
24	− 4,8	− 6,8	4,2	8,2
25	5,4	0,4	14,4	9
26	16,4	− 0,6	4,4	9
27	1,4	10,4	− 6	3
28	7,4	− 5,6	− ,6	− 6
29	5,4	− 0,6	− ,6	− 7
30	4,4	− 6,6	,4	0
31	− 5	− 3	7	0
32	7	− 4	0	5
33	−10	4	−10	0,4
34	6	−10	−11	− 6
35	7	− 5	− 7	0
36	12	−10	0	3
37	− 4,6	− 2,6	8,4	3
38	7,4	− 4,6	8,4	5
39	− 6,6	2.4	−9,6	3
40	5,5	− 9,6	−9,6	− 5
41	5,5	− 5.6	− 5,6	3
42	5,4	−10.6	1,4	5

Repetăm procedura de omogenizare pentru șirul de patru dispersii:

$$67{,}84;\ 37{,}76;\ 88{,}56;\ 35{,}27.$$

Valoarea testului Bartlett, calculată pentru dispersiile estimate va fi:

$$\chi^2_{calc} = \frac{2{,}3016}{C}\left(f \lg \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^{4} f_i \lg s_i^2\right) = 12{,}2556,$$

iar $C = 1{,}010163$. Întrucît $\chi^2_{calc} > \chi^2_{99,95;\,3} = 7{,}81$ este necesar să omogenizăm șirul celor patru dispersii. Aplicînd testul Cochran se elimină dispersia $s_3^2 = 88{,}565$.

Estimăm dispersia tolerată σ_2^2 ca medie a dispersiilor s_1^2, s_2^2, s_4^2. Deci $\tilde{\sigma}_2^2 = \bar{s}^2 = 46{,}95 \approx \sigma_2^2$.

Înainte de a trece la aplicarea concretă a metodelor prezentate, precizăm că valorile riscurilor producătorului α și beneficiarului β sînt fie fixate de comun acord între părți, fie, cum vom lucra în cazul de față, cu valorile recomandate de standardele internaționale $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}10$.

Să considerăm acum cazul primei variante a controlului secvențial bucată cu bucată pentru care au fost stabilite relațiile (9), (11), (13), condițiile de acceptare și respingere, precum și de continuare a controlului. Luînd $\alpha = 0{,}05$, $f = 0{,}10$, $\sigma_1^2 = 34{,}43$ și $\sigma_2^2 = 46{,}95$ și folosind relațiile (10) și (12) care dau valorile coeficienților h_1, h_2, h_3 obținem: $h_1 = -558{,}0394$; $h_2 = 716{,}45$; $h_3 = 39{,}85$, situație în care condițiile (9), (11) și (13) devin:

$$(n-1)s^2 \leqslant -558{,}0394 + 39{,}85(n-1) \tag{31}$$

$$(n-1)s^2 \geqslant 716{,}45 + 39{,}85(n-1) \tag{32}$$

$$-558{,}0394 + 39{,}85(n-1) < (n-1)s^2 < 716{,}45 + 39{,}85(n-1). \tag{33}$$

Folosind succesiv relațiile (14), (15) și (16) vom calcula numerele medi la produse controlate pînă la acceptare, respingere sau pînă la luarea une decizii oarecare:

$$M(n/\sigma_1) \simeq 85;\quad M(n/\sigma_2) \simeq 83;\quad M(n)_{max} \simeq 126.$$

În procesul de control secvențial, vom alcătui tabelul 3, în care coloanele (3), (4) și (8) se completează în timpul controlului. Celelalte coloane (2), (5) și (7) sînt anterior calculate pentru un număr suficient de mare de valori ale lui n, care acoperă numerele medii de probe necesare pînă la acceptarea sau respingerea lotului și care sînt $n = 85$, respectiv $n = 83$. Tabelul indică luarea unei decizii cînd este satisfăcută una din inegalitățile (31) sau (32) sau continuarea controlului cînd este satisfăcută inegalitatea (33). De remarcat că valoarea dispersiei s^2 din tabelul 3 variază o dată cu creșterea numărului n al produselor verificate. Valorile lui s^2 sînt calculate în procesul efectuării controlului o dată cu obținerea secvențială a rezultatelor individuale pînă la luarea unei decizii. Din tabelul 3 se vede că după $n = 78$ de produse controlate se ia decizia de respingere a lotului.

În cazul variantei a doua, vom lua în considerare eșantioanele de volume egale. Pentru exemplul prezentat $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 16$ reprezintă numărul minim de probe începînd de la care, în cazul controlului secvențial indi-

vidual, obținem numărul minim de produse controlate pentru acceptarea lotului.

Tabelul 3

	n	x_i	s_i^2	$(n-1)\,h_3+h_1$	$(n-1)\,s_i^2$	$(n-1)\,h_3+h_2$	Decizia
1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	—	—	—	—	—	—
2	2	44	2	−518,184	2	756,300	continuă
3	3	39,2	1,318	−478,331	27,63	796,150	continuă
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
77	77	37,2	48,78	2430,71	3569,32	3705,20	continuă
78	78	41,5	49,63	2470,56	3771,88	3745,05	respingere
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

În baza relațiilor (25), (26), (27) condițiile de respingere, acceptare și continuare a controlului vor fi:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \geqslant 716{,}45 + 39{,}85 \sum_{i=1}^{r} k_i \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^{r} k_i s_i^2 \leqslant -\,558{,}0394 + 39{,}85 \sum_{i=1}^{r} k_i \tag{35}$$

și

$$-\,558{,}0394 + 39{,}85 \sum_{i=1}^{r} k_i < k_i s_i^2 < 716{,}45 + 39{,}85 \sum_{i=1}^{r} k_i. \tag{36}$$

Alcătuim și în acest caz tabelul 4 în care coloanele (4), (5), (7) și (9) se completează în procesul controlului și care indică luarea unei decizii cînd este satisfăcută una din relațiile (34) — (36). Nu s-au mai continuat calculele, procedeul de luare a deciziei fiind evident analog cu cel descris la punctul precedent.

Tabelul 4

i	$k_i = n_i - 1$	Σk_i	S_i^2	$k_i S_i^2$	$h_3 \Sigma k_i + h_1$	$\Sigma k_i \cdot S_i^2$	$h_3 \Sigma k_i + h_2$	Decizie
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	15	15	57,2	859,76	39,71	859,76	1314,20	continuă
2	15	30	68,17	1172,61	637,46	1882,31	1911,95	continuă
3	15	45			1235,21		2509,70	
4	15	60			1832,86		3107,45	
5	15	75			2430,71		3705,20	

CONCLUZII

Metoda propusă (în oricare din cele două variante prezentate) permite separarea loturilor omogene de cele neomogene, loturi în care performanțele calitative oscilează într-o gamă largă de la produs la produs.

Este util să facem precizarea că aplicînd o asemenea metodă de recepție sînt semnalate nu numai loturile ce nu corespund calitativ, datorită faptului că prezintă în componență un număr de produse necorespunzătoare mai mare decît limita admisibilă, ci chiar loturi corespunzătoare calitativ, dar în a căror componență produsele diferă mult unul față de altul din punctul de vedere al nivelului caracteristicilor de calitate.

Privitor la posibilitățile concrete de aplicare, este necesar să facem precizarea că metodologia se finalizează într-o procedură de control relativ simplă, limitele de control putîndu-se calcula anterior în cadrul alcătuirii schemei de sondaj (tabelele 3 și 4), în timpul efectuării controlului propriu-zis calculîndu-se în principal dispersia de sondaj.

În exemplul considerat controlul efectuat prin metoda sondajului secvențial s-a încheiat prin respingerea după controlarea produsului al 78-lea, cifră ce se apropie de numărul mediu de produse controlate pentru respingere $M(n/\sigma_2) = 83$. Evident, numărul unităților controlate oscilează de la un plan de sondaj la altul, atît în funcție de valorile admise și tolerate ale parametrului de împrăștiere σ_1 și σ_2, cît și de mărimile celor două riscuri α și β (în cazul de față s-a lucrat cu valorile recomandate de standardele internaționale $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}10$).

Menționăm că metodele de verificare a omogenității loturilor nu elimină metodologia actuală de recepție prin medie, ci le completează, ele trebuind să fie utilizate ori de cîte ori există dubii cu privire la constanța parametrilor calitativi ai produselor în interiorul unui lot.

BIBLIOGRAFIE

1. BĂDIN V., ISAIC MANIU AL.: *Metodă statistică de control a omogenității loturilor cu caracteristici măsurabile.* Revista de statistică, nr. 2, 1975.
2. WALD A.: *Sequential analysis.* New York, 1967.
3. SVEȘNIKOV A. A. și colab.: *Sbornic zadaci po teorii veroiatnostei, matematicescoi statistiche i teorii sluciainih funcții.* Izdatelstvo Nauca. Glavnaia redacția Fizico-Matematicescoi literaturî. Moscova, 1975.
4. * * * STAS 8921 — *Perturbații radioelectrice — Terminologie.* 1971.
5. RANCU N., TŐVISSI L.: *Statistică matematică cu aplicații în producție.* Editura Academiei R.S.R., București, 1963.
6. GNEDENKO B. V. și colab.: *Méthodes mathématiques en théorie de la fiabilité.* Editura Mir. Moscova, 1972.
7. CIUCU G., CRAIU V.: *Interferența statistică.* Editura didactică și pedagogică, București, 1974.
8. NANCY R. MANN și colab.: *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data.* John Wiley, New-York, 1974.

9.VII.1976

C. NICODA
Președintele Comitetului Executiv
al Consiliului Popular al sectorului IV — București
V. CARNAZIU
Academia de studii economice

Studierea utilizării timpului de lucru de către muncitorii unei întreprinderi industriale

Dată fiind importanța deosebită pe care o are cunoașterea cît mai exactă a modului în care este utilizat timpul în cadrul unei zile de lucru, acest studiu propune o metodă de organizare a unei observări instantanee, pe baze riguros statistico-matematice. Asupra colectivității luată în studiu se aplică un sondaj, iar rezultatele lui dau o imagine detaliată a modului în care își împart timpul de lucru diferite grupe de muncitori în diferite perioade ale zilei.

Factorul hotărîtor al victoriei orînduirii socialiste îl constituie creșterea continuă și în ritm rapid a productivității muncii. Noul cincinal 1976—1980, în lumina documentelor celui de al XI-lea Congres al P.C.R., are printre altele ca obiective reducerea cheltuielilor materiale, ridicarea calității produselor, precum și creșterea productivității muncii. Modul în care este utilizat timpul de lucru are o influență importantă asupra productivității muncii. Neutilizarea rațională a fondului de timp de către fiecare întreprindere duce la un volum de personal mai mare decît este necesar și la o productivitate a muncii sub posibilități.

Fondul de timp maxim disponibil, obținut prin scăderea timpului rezervat pentru concedii de odihnă, sărbători legale și zile de repaus legal, se împarte în fondul de timp efectiv lucrat și fondul de timp neutilizat. Acesta din urmă cuprinde concedii de boală, program redus, absențe aprobate prin lege și alte întreruperi din cauze obiective, iar în plus, mari rezerve de timp, care ar putea fi utilizate efectiv: învoiri, concedii fără plată, absențe nemotivate etc.

Dar în multe cazuri chiar fondul de timp considerat ca fiind „efectiv lucrat" nu este utilizat rațional. Cele 8 ore de muncă cuprind

întreruperi mari datorate unor carențe în aprovizionarea permanentă cu curent electric, în reglarea la timp a utilajului și întreruperi din vina muncitorului. Aceste pierderi de timp se materializează într-un mare volum de producție pierdută.

Este deci, de mare importanță cunoașterea exactă a ponderii pe care o deține timpul afectat fiecărei activități executate de muncitori, în totalul celor 480 de minute ale zilei de lucru. Aceasta poate servi ca bază pentru analiza cauzelor care determină eventualele carențe în folosirea cît mai economică a fondului de timp și deci, pentru luarea măsurilor necesare.

Putem obține acest lucru prin efectuarea unui sondaj tipic asupra colectivității muncitorilor luați în studiu.

Să considerăm colectivitatea „m" de volum „M", formată din muncitorii unei întreprinderi industriale sau a unei secții și o împărțim în grupe, după gradul de îndeplinire a normelor:

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_p, \text{ de volum } M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_p, \text{ unde } \sum_i M_i = M.$$

Timpul de lucru al muncitorilor conține T intervale de timp, în care, presupunem că o anumită activitate pe care o urmărim nu se schimbă. Timpul de lucru este utilizat diferit în diferite perioade ale zilei, deci îl vom împărți în grupe de intervale: $t_1, t_2, \ldots, t_j, \ldots, t_r$, cuprinzînd un număr de intervale $T_1, T_2, \ldots, T_j, \ldots, T_r$, unde $\sum_j T_j = T$.

Toate activitățile executate de un muncitor într-o zi pot fi grupate în k grupe în funcție de scopul în care este organizat acest tip de observare instantanee. Ponderea pe care o deține fiecare din aceste grupe de activități diferă în funcție de perioada în care facem înregistrarea (t_j) și de grupa de muncitori (m_i) pe care o urmărim.

Vom face studiul asupra colectivității $N = MT$ muncitori-intervale, grupată în $p \times r$ grupe, în funcție de caracteristica studiată, adică de ponderea pe care o deține activitatea k.

Considerăm parametrii:

N_{ijk} — numărul de muncitori din grupa m_i care în perioada t_j execută activitatea k;

$N_{ij.}$ — numărul de observatori asupra grupei m_i, în perioada t_j;

$N_{i.k}$ — numărul de muncitori din grupa m_i, care au fost înregistrați executînd activitatea k;

$N_{.jk}$ — numărul de observări efectuate în perioada t_j în care s-a înregistrat activitatea k;

$N_{i..}$ — numărul de observări asupra grupei m_i;

$N_{.j.}$ — numărul de observări din perioada t_j;

$N_{..k}$ — numărul de observări în care s-a înregistrat activitatea k;

$N_{...}$ — numărul total de observări.

Grupele asupra cărora facem observarea vor fi:

A_1 de volum M_1T_1, adică N_{11}

A_2 „ M_1T_1, „ N_{12}

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

A_j „ M_1T_j „ N_{1j}

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

A_r „ M_1T_r, „ N_{1r}

A_{r+1} „ M_2T_1, „ N_{21}

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

A_{r+j} „ M_2T_j, „ N_{2j}

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

A_{2r} „ M_2T_r „ N_{2r}

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

A_{pr} „ M_pT_r „ N_{pr}

Cu aceste date completăm tabelul 1.

Ponderea pe care o deține activitatea k în cadrul grupei A_{ij}, va fi dată de relația:

$$P_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{N_{ij}}, \quad \text{unde} \quad \sum_k N_{ijk} = N_{ij} \quad \text{și} \quad \sum_k p_{ijk} = 1.$$

Dacă grupăm observările numai după muncitorii asupra cărora facem observarea, în fiecare din aceste grupe, ponderea operației k va fi:

$$P_{i\cdot k} = \frac{N_{i\cdot k}}{N_{i\cdot\cdot}}, \quad \text{unde} \quad \sum_k N_{i\cdot k} = N_{i\cdot\cdot} \quad \text{și} \quad \sum_k p_{i\cdot k} = 1.$$

Dacă grupăm observările după perioada în care facem înregistrarea obținem:

$$p_{\cdot jk} = \frac{N_{\cdot jk}}{N_{\cdot i\cdot}}, \quad \text{unde} \quad \sum_k N_{\cdot jk} = N_{\cdot j} \quad \text{și} \quad \sum_k p_{\cdot jk} = 1.$$

Tabelul 1

	$k=1$	$\sum_i \sum_j$	$k=2$	$\sum_i \sum_j$		$k=K$	$\sum_i \sum_j$	$\sum_i \sum_j \sum_t$
m \ t	t_1 t_2 ... t_j ... t_r	$\sum_i$	t_1 t_2 ... t_j ... t_r	$\sum_i$	...	t_1 t_2 ... t_j ... t_r	$\sum_i$	$\sum_i$
m_1	N_{111} N_{121} ... N_{1j1} ... N_{1r1}	$N_{1\cdot 1}$	N_{112} N_{122} ... N_{1j2} ... N_{1r2}	$N_{1\cdot 2}$	...	N_{11k} N_{12k} ... N_{1jk} ... N_{1rk}	$N_{1\cdot k}$	$N_{1\cdot\cdot}$
m_2	N_{211} N_{221} ... N_{2j1} ... N_{2r1}	$N_{2\cdot 1}$	N_{212} N_{222} ... N_{2j2} ... N_{2r2}	$N_{2\cdot 2}$	...	N_{21k} N_{22k} ... N_{2jk} ... N_{2rk}	$N_{2\cdot k}$	$N_{2\cdot\cdot}$
⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	...	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮
m_i	N_{i11} N_{i21} ... N_{ij1} ... N_{ir1}	$N_{i\cdot 1}$	N_{i12} N_{i22} ... N_{ij2} ... N_{ir2}	$N_{i\cdot 2}$	...	N_{i1k} N_{i2k} ... N_{ijk} ... N_{irk}	$N_{i\cdot k}$	$N_{i\cdot\cdot}$
⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋯	⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	...	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮
m_p	N_{p11} N_{p21} ... N_{pj1} ... N_{pr1}	$N_{p\cdot 1}$	N_{p12} N_{p22} ... N_{pj2} ... N_{pr2}	$N_{p\cdot 2}$	...	N_{p1k} N_{p2k} ... N_{pjk} ... N_{prk}	$N_{p\cdot k}$	$N_{p\cdot\cdot}$
jk	$N_{\cdot 11}$ $N_{\cdot 21}$ ... $N_{\cdot j1}$ ... $N_{\cdot r1}$	$N_{\cdot\cdot 1}$	$N_{\cdot 12}$ $N_{\cdot 22}$ ... $N_{\cdot j2}$ ... $N_{\cdot r2}$	$N_{\cdot 2\cdot}$	...	$N_{\cdot 1k}$ $N_{\cdot 2k}$ ... $N_{\cdot jk}$ ... $N_{\cdot rk}$	$N_{\cdot\cdot k}$	$N_{\cdot\cdot\cdot}$
ik	$N_{\cdot 11}$ $N_{\cdot 12}$ ... $N_{\cdot 1k}$ ...	$N_{\cdot 1\cdot}$	$N_{\cdot 21}$ $N_{\cdot 22}$ ... $N_{\cdot 2k}$	$N_{\cdot 2\cdot}$	...	$N_{\cdot j1}$ $N_{\cdot j2}$ ... $N_{\cdot jk}$	$N_{\cdot j\cdot}$	... $N_{\cdot r1}$ $N_{\cdot r2}$ ... $N_{\cdot rk}$	$N_{\cdot r\cdot}$

Ponderea activității k în cadrul activităților întregii colectivități de muncitori, pe întreaga perioadă t va fi:

$$p_{\cdot\cdot k} = \frac{N_{\cdot\cdot k}}{N_{\ldots}}, \quad \text{unde} \quad \sum_k N_{\cdot\cdot k} = N_{\ldots}, \quad \text{iar} \quad \Sigma p_{\cdot k} = 1;$$

$$p_{i\cdot k} = \sum_j p_{ijk} \cdot f_i^{(j)}, \quad \text{unde} \quad f_i^{(j)} = \frac{N_{ij}}{N_{i\cdot\cdot}}, \quad \text{deoarece} \quad \sum_j \frac{N_{ijk}}{\sum_j N_{ij\cdot}} = \frac{N_{i\cdot k}}{N_{i\cdot\cdot}};$$

$$p_{\cdot jk} = \sum_i p_{ijk} f_j^{(i)}, \quad \text{unde} \quad f_j^{(i)} = \frac{N_{ij}}{N_{\cdot j\cdot}}, \quad \text{deoarece} \quad \sum_i \frac{N_{ijk}}{N_{ij\cdot}} = \frac{N_{\cdot jk}}{N_{\cdot j}}$$

$f_i^{(j)}$ reprezintă ponderea muncitorilor din grupa m_i, observați în perioada t_j, din totalul muncitorilor din grupa m_i,

$f_i^{(j)}$ reprezintă ponderea muncitorilor observați în perioada t_j, din grupa m_i, din totalul muncitorilor observați în perioada t_j;

p_{ijk} T_j este timpul folosit, în medie, de un muncitor din grupa m_i, pentru activitatea k, în perioada t_j;

p_{ijk} M_j este numărul mediu de muncitori din grupa m_i, care în perioada t_j, execută activitatea k.

Deci:

$$p_{i\cdot k} = \sum_j \frac{p_{ijk} \cdot T_j}{\sum_j T_j} \quad \text{și} \quad p_{ijk} = \sum_i \frac{p_{ijk} \cdot M_i}{\sum_i M_i}.$$

Din cele două feluri de exprimare a ponderilor $p_{i\cdot k}$ și $p_{\cdot jk}$, reiese că:

$$f_i^{(j)} = \frac{T_j}{\sum_j T_j} \quad \text{și} \quad f_j^{(i)} = \frac{M_i}{\sum_i M_i}, \quad \text{deci} \quad \frac{T_j}{\sum_j T_j} = \frac{M_{ij}}{M_i} \quad \text{și}$$

$$\frac{M_i}{\sum_i M_i} = \frac{M_{ij\cdot}}{M_{\cdot j}}, \quad \text{unde} \quad \sum_j N_{ij\cdot} = M_i \ldots \quad \text{și} \quad \sum_i N_{ij} = M_{\cdot j}$$

$f_k^{(i)}$ reprezintă ponderea muncitorilor din grupa m_i, care au fost înregistrați executînd activitatea k, din totalul muncitorilor care execută activitatea k;

$f_k^{(j)}$ reprezintă ponderea muncitorilor care execută activitatea k, în perioada t_i, din totalul muncitorilor care execută activitatea k, în perioada t_j.

Caracteristica polinomială $p_{\cdot\cdot k}$ poate fi descompusă în $p \times r$ caracteristici p_{ijk}, fiecare dintre ele fiind o variabilă aleatoare, în grupa de volum N_{ij}, pentru care putem calcula dispersia s_{ijk}, pentru fiecare din cele k activități urmărite.

În urma unei înregistrări totale (fotografiere a zilei de lucru asupra unui număr restrîns de muncitori din fiecare grupă putem calcula o valoare medie a ponderii p_{ijk}, față de care vom stabili dispersiile s_{ijk} cu care apro-

Tabelul 2

	$k=1$					$\sum_i \sum_j$	$k=2$					$\sum_i \sum_j$	...	$k=K$					$\sum_i \sum_j$	$\sum_i \sum_j \sum_t$
m \ t	t_1	t_2	...	t_j	... t_r	i	t_1	t_2	...	t_j	... t_3	i	...	t_1	t_2	...	t_j	... t_r	$\sum_i$	$\sum_i$
m_1	n_{111}	n_{121}	...	n_{1j1}	... n_{1r1}	$n_{1\cdot 1}$	n_{112}	n_{122}	...	n_{1j2}	... n_{1r2}	$n_{1\cdot 2}$	...	n_{11k}	n_{12k}	...	n_{1jk}	... n_{1rk}	$n_{1\cdot k}$	$n_{1\cdot\cdot}$
m_2	n_{211}	n_{221}	...	n_{2j1}	... n_{2r1}	$n_{2\,1}$	n_{212}	n_{222}	...	n_{2j2}	... n_{2r1}	$n_{2\cdot 2}$	...	n_{21k}	n_{22k}	...	n_{2jk}	... n_{2rk}	$n_{2\cdot k}$	$n_{2\cdot\cdot}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮		⋮	⋮	...	...
m	n_{i11}	n_{i21}	...	n_{ij1}	... n_{ir1}	n_1	n_{i12}	n_{i22}	...	n_{ij2}	... n_{ir2}	$n_{i\cdot 2}$	...	n_{i1k}	n_{i2k}	...	n_{ijk}	... n_{irk}	$n_{i\cdot k}$	$n_{i\cdot\cdot}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮		⋮	⋮	...	...
m	n_{p11}	n_{p21}	...	n_{pj1}	... n_{pr1}	n	n_{p12}	n_{p22}	...	n_{pj2}	n_{pr2}	$n_{p\cdot 2}$	...	n_{p1k}	n_{p2k}	...	n_{pjk}	... n_{prk}	$n_{p\cdot k}$	$n_{p\cdot\cdot}$
$\sum_j \sum_k$	$n_{\cdot 11}$	$n_{\cdot 21}$	...	$n_{\cdot j1}$	... $n_{\cdot r1}$	$n_{\cdot\cdot 1}$	$n_{\cdot 12}$	$n_{\cdot 22}$	...	$n_{\cdot j2}$	... $n_{\cdot r2}$	$n_{\cdot\cdot 2}$	...	$n_{\cdot 1k}$	$n_{\cdot 2k}$	...	$n_{\cdot jk}$	... $n_{\cdot rk}$	$n_{\cdot\cdot k}$	$n_{\cdot\cdot\cdot}$
$\sum_j \sum_k$	$n_{\cdot 11}$	$n_{\cdot 12}$	...	$n_{\cdot 1k}$	$n_{\cdot 1\cdot}$	$n_{\cdot 21}$	$n_{\cdot 22}$	...	$n_{\cdot 2k}$	$n_{\cdot 2\cdot}$	...	$n_{\cdot j1}$	$n_{\cdot j2}$	...	$n_{\cdot jk}$	$n_{\cdot j\cdot}$	...	$n_{\cdot r1}$	$n_{\cdot r2}$	... $n_{\cdot rk}$	$n_{\cdot r\cdot}$

ximăm dispersiile de selecție T_{ijk}. Vom avea k asemenea dispersii, pentru fiecare din cele k activități urmărite.

În funcție de activitatea cea mai importantă sau care are dispersia cea mai mare în grupe, deci în funcție de care grupele nu pot fi omogenizate în măsură prea mare, vom calcula volumul eșantionului care va prezenta astfel, maximum de reprezentativitate.

Stabilim eroarea limită de reprezentativitate după formula:

$\Delta\bar{p}_{..k} = \frac{R_{\bar{p}..k} \cdot p}{100}$, unde $R_{\bar{p}..k}$ este stabilit în funcție de ponderea celei mai scurte activități, iar p este ponderea celei mai îndelungate activități, care nu va fi, în nici un caz, depășită.

Calculul volumului eșantionului general și al eșantionului corespunzător fiecărei grupe se face cu formulele:

$$n = \frac{t^2\bar{\sigma}^2_{jik^x}}{\Delta^2_{\bar{p}..k} + \frac{t^2\sigma^2_{ijk^x}}{N}} \quad \text{și} \quad n_{ij} = \frac{\sigma_{ijk^x}N_{ij}}{\sum_i \sum_j N_{ij} \cdot \sigma_{ijk^x}} \cdot n$$

unde k^x este activitatea în funcție de care avem maximum de neomogenitate în grupe și deci, volumul tuturor eșantioanelor va fi reprezentativ pentru toate cele k.

Parametrul t se găsește în tabelele cu funcția normală de probabilitate, corespunzător unei probabilități $\Phi(t)$ cu care ne propunem să garantăm rezultatele.

$\sum_i \sum_j m_{ij} = n$, iar gruparea este făcută astfel ca dispersiile σ_{ijk} să fie minime. Sondajul tipic optim este deci eficient. Dintr-un tabel cu numere întîmplătoare vom stabili colectivitățile de selecție asupra cărora organizăm o observare instantanee, iar datele obținute în urma ei le trecem în tabelul 2.

Se aproximează ponderile de care avem nevoie cu ponderile calculate pe baza datelor obținute din selecție:

$$\tilde{p}_{ijk} = \frac{n_{ijk}}{n_i}, \quad \text{unde} \quad \sum_k \tilde{p}_{ijk} = 1 \quad \text{și} \quad \sum_k p_{ijk} = n_{ij}$$

$$\tilde{p}_{i\cdot k} = \frac{n_{i\cdot k}}{n}, \quad \text{unde} \quad \sum_k \tilde{p}_{i\cdot k} = 1 \quad \text{și} \quad \sum_k n_{\cdot ik} = n_i$$

$$\tilde{p}_{\cdot jk} = \frac{n_{\cdot jk}}{n_{\cdot j}}, \quad \text{unde} \quad \sum_k \tilde{p}_{ijk} = 1 \quad \text{și} \quad \sum_k n_{\cdot jk} = n_{\cdot j}$$

$$\tilde{p}_{..k} = \frac{n_{..k}}{n_{...}}, \quad \text{unde} \quad \sum_k \tilde{p}_{..k} = 1 \quad \text{și} \quad \sum_k n_{..k} = n_{...}$$

$\widetilde{p}_{..k}$ este o variabilă aleatoare, iar sondajul este de volum mare, deci $\widetilde{p}_{..k}$ urmează asimptotic legea normală de probabilitate cu parametrii:

$$M_{\widetilde{(p}_{..k)}} = p_{..k} \quad \text{și} \quad \Delta^2_{\widetilde{(p}_{..k)}} = \frac{1}{n}\,\sigma^2_{ijk} - \frac{1}{N}\,\bar{\sigma}^2_{ijk}$$

$$\bar{\sigma}_{ijk} = \sum_i \sum_j \frac{\sigma_{ijk} N_{ij}}{\sum_i \sum_j M_{ij}}; \quad \sigma^2_{jik} = \sum_i \sum_j \frac{\sigma_{ijk} N_{ji}}{\sum_i \sum_j N_{ij}}$$

vom avea k asemenea formule, pentru fiecare din cele $p \times r$ grupe.

T_{ijk} este cel aproximat prin s_{ijk}

$M_{\widetilde{(p}_{..k)}} = p_{..k}$ (repetăm înregistrarea pe mai multe zile)

$\Delta^2_{\widetilde{(p}_{..k)}} \to 0$, cînd $n \to N_{ij}$.

Deci $\widetilde{p}_{..k}$ este o pondere absolut corectă pentru $p_{..k}$. În funcție de dispersia calculată pentru fiecare din cele k activități, vom stabili eroarea limită de reprezentativitate în care garantăm rezultatele, cu o probabilitate $\Phi(t)$ dată:

$\Delta_{\widetilde{p}_{..k}} = t \sqrt{\Delta^2_{\widetilde{(p}_{..k)}}}$ și vom scrie pentru fiecare din cele k activități:

$$P_{\widetilde{(p}_{..k)}} - \Delta_{\widetilde{p}_{..k}} \leq \widetilde{p}_{..k} \leq \widetilde{p}_{..k} + \Delta_{\widetilde{p}_{..k}} = \Phi(t).$$

Rezultatele obținute prin această metodă dau o imagine generală a modului în care este utilizat timpul de lucru de către muncitorii unei întreprinderi sau secții. Ele pot fi folosite în scopul în care este folosită în general înregistrarea instantanee: stabilirea timpilor auxiliari, a rezervelor de timp din cadrul schimbului, pentru stabilirea normativelor și a planurilor MTO. Pot fi folosite pentru verificarea justeții unor reclamații privitor la stabilirea normelor, a aplicării unor penalizări etc. Se poate stabili modul în care muncitorii auxiliari și asistența tehnică își fac datoria, caz în care cronometrarea nu este eficientă.

Datorită modului riguros statistico-matematic, în care sînt elaborate formulele de calcul, această metodă poate fi folosită pentru studii în probleme de organizarea muncii sau de psihologia muncii. De asemenea, ea poate fi folosită în cazul studiilor pentru reorganizarea unei întreprinderi sau secții, pentru reprofilarea întreprinderii sau pentru introducerea unor noi produse în fabricație.

BIBLIOGRAFIE

1. NICOLAE CEAUȘESCU: *Raport la cel de-al XI-lea Congres al Partidului Comunist Român*. București, Editura politică, 1974.
2. IVĂNESCU I., BIJI ELENA: *Călăuza statistică*. București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
3. MIHOC GH., URSEANU V.: *Matematici aplicate în statistică*. București, Editura Academiei R.S.R., 1962.
4. DEMETRESCU M. C.: *Marketing*. București, Editura politică, 1973.
5. BURLOIU P.: *Economia și organizarea muncii*. Curs litografiat A.S.E., 1976.

20.I.1975

GH. PESCARU
Ministerul industriei chimice
GH. I. BĂRBATU
CHIMPEX — Constanța
V. IONESCU
Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

Metode de determinare a indicelui de vîscozitate cu ajutorul corelației multiple

În lucrarea de față autorii abordează problema determinării indicelui de viscozitate al unui ulei, utilizînd metode statistico-matematice în vederea folosirii acestuia la scrierea restricției de viscozitate din modelul de amestec.

În problema modelării amestecurilor de uleiuri cu ajutorul metodelor moderne ale matematicii și al calculatoarelor electronice, în scopul obținerii unor rețete optime de amestec din punctul de vedere al prețului de cost (minim) sau al beneficiului (maxim), un loc important îl ocupă restricțiile referitoare la calitățile amestecului printre care și restricțiile privitoare la indicele de vîscozitate.

După cum se știe, indicele de vîscozitate Dean Davis este un număr calculat pe baza unor premise convenționale și care indică calitatea unui ulei din punctul de vedere al variației vîscozității cu temperatura. Un indice de vîscozitate mic indică o variație mare a vîscozității cu temperatura și invers.

La uleiuri care separă parafină la temperaturi joase, indicele de vîscozitate nu mai caracterizează variația vîscozității cu temperatura în domeniul acelor temperaturi. Conform STAS 55-58 [2], indicele de vîscozitate se determină în principiu astfel:

Se compară uleiul de cercetat, căruia i s-au determinat vîscozitățile cinematice la 98,9° C și 37,8° C, cu două uleiuri de referință care la 98,9°C au aceeași vîscozitate ca și uleiul de cercetat. Uleiurile de referință fac parte din două serii de uleiuri ipotetice alese ca etalon.

Uleiurile de referință din prima serie (L) sînt uleiuri (tip Pensilvania) a căror variație a vîscozității cu temperatura este mică; acestora li s-a atri-

buit convențional indicele de vîscozitate 100. Uleiurile de referință din a doua serie (H) sînt uleiuri (tip Gulf Coast) a căror variație a vîscozității cu temperatura este mare; acestora li s-a atribuit — convențional — indicele de vîscozitate 0.

Vîscozitățile cinematice la temperatura de 37,8°C ale uleiurilor de referință care la 98,9°C au aceeași vîscozitate cinematică (λ) ca și uleiul de cercetat, determinată tot la 98,9°C, se calculează astfel:

$$L = 1{,}655\ \lambda + 1{,}2625\ \lambda^2, \tag{1}$$

$$H = 1{,}4825\ \lambda + 0{,}91375\ \lambda^2. \tag{2}$$

Indicele de vîscozitate (Iv) se calculează cu formula:

$$Iv = \frac{L - U}{L - H} \times 100 \tag{3}$$

în care U reprezintă vîscozitatea cinematică a uleiului de cercetat la 37,8°C în cst.

În acest scop se determină vîscozitatea uleiului de cercetat la 98,9°C și la temperatura de 37,8°C conform STAS 117-56.

Se caută în tabelul din STAS valorile L și $L - H$ corespunzătoare vîscozității cinematice la 98,9°C a uleiului de cercetat și se introduc în formula (3). Rezultatele obținute din calcul se rotunjesc prin trunchiere. În ceea ce privește precizia determinării, se iau ca bază vîscozitățile rezultate la trei determinări consecutive, care nu diferă de media lor cu mai mult de 0,3% din valoarea medie.

În cazul determinărilor de vîscozitate făcute de operatori diferiți cu aparate diferite, diferența dintre indicii de vîscozitate nu trebuie să depășească valorile de mai sus cu mai mult de 50%.

Tabelul 1

Tabel referitor la precizia determinării Iv

Vîscozitate cinematică la 98,9 °C (cst)	Diferența a două determinări în unități Iv	
	Ulei cu $Iv = 0$	Ulei cu $Iv = 100$
4	6	4
6	4	3
8	4	2
12	3	1
20	2	1

În lucrarea de față autorii au elaborat cu ajutorul corelației multiple, o relație de forma $Iv = f(V_1, V_2, V_3)$ în care:

V_1 reprezintă vîscozitatea în cst la 50°C.

V_2 — vîscozitatea în cst la 37,8°C

V_3 — vîscozitatea în cst la 98,9°C.

Cu ajutorul nomogramei 5 din [3] s-au transformat vîscozitățile din grade Engler în centistokes. Apoi, cu ajutorul tabelului III.8 din [1], se

transformă viscozitatea din cst în indici de amestec (*Ia*). Exprimate în unități *Ia*, viscozitățile se comportă liniar în amestec.

Astfel datele primare din tabelul 2, au fost liniarizate conform tabelului 3.

Tabelul 2

Date primare ale viscozității diverselor uleiuri

I	Viscozitate la 50°C, E	Viscozitate la 37,8°C, cst	Viscozitate la 98,9°C	Densitate
96	3,82	47	6,5	0,8830
90,1	7,70	107	10,7	0,8950
83	20,20	323	20,9	0,8980
90,1	7,00	98	10,1	0,8940
90,8	6,62	89	9,5	0,8920
91,2	6,11	83	9,1	0,8910
91,2	5,72	76	8,6	0,8900
92,4	5,21	70	8,2	0,8890
92,5	4,93	64,6	7,8	0,8870
93,6	4,70	59	7,7	0,8860
94,3	4,30	55	7,1	0,8840
94,9	4,00	51	6,8	0,8960
84,3	15,00	231,4	17,1	0,8940
86,1	12,40	187,4	15,1	0,8920
86,7	10,50	153,4	13,3	0,8900
88,4	8,70	124,2	11,7	0,8890
90,6	7,40	103,6	10,5	0,8880
92	6,3	86	9,35	0,8880
93,8	5,46	72	8,40	0,8870
94,2	4,63	60	7,50	0,8850
85,6	13,80	204	16,000	0,8960
86	12,20	182,6	14,80	0,8956
86,6	11,20	164,2	14,10	0,8953
87	11,20	167,0	14,10	0,8950
89,2	8,25	120	11,40	0,8944
89,3	7,66	108	10,60	0,8941

Tabelul 3

Date privind viscozitățile liniarizate

I	V_1	V_2	V_3	*d*
96,0	28,88	30,61	20,94	0,8830
90,1	31,72	33,40	23,93	0,8950
83,0	34,60	36,48	27,27	0,8980
90,1	31,32	33,13	23,63	0,8940
90,8	31,19	32,83	23,28	0,8920
91,2	30,99	32,60	23,03	0,8910
91,2	30,61	32,30	22,69	0,8900
92,4	30,20	32,04	22,41	0,8890
92,5	29,92	31,75	22,10	0,8870
93,6	29,69	31,45	21,77	0,8860
94,3	29,23	31,19	21,52	0,8840

(continuare tabelul 3)

I	V_1	V_2	V_3	d
94,9	29,05	30,93	21,24	0,8960
84,3	33,90	35,57	26,37	0,8940
86,1	33,20	35,04	25,75	0,8920
86,7	32,75	34,47	25,10	0,8900
88,4	32,13	33,86	24,83	0,8890
90,6	31,51	33,30	23,83	0,8880
92,0	31,06	32,71	23,18	0,8880
93,8	30,45	32,13	22,55	0,8870
95,2	29,46	31,51	21,86	0,8850
85,6	33,65	35,27	26,05	0,8960
86,0	33,13	34,97	25,92	0,8956
86,6	32,94	34,67	25,41	0,8953
87,0	32,94	34,06	25,38	0,8950
89,2	31,81	33,76	24,28	0,8944
89,3	31,64	33,43	23,88	0,8941

Calculînd coeficienţii de regresie * pe baza acestor date s-a obţinut următoarea relaţie care permite determinarea Iv al uleiurilor, în funcţie de vîscozităţile cinematice la 37,8°C, 50°C, 98,9°C şi a densităţii la 15/4:

$$Iv = 128{,}902328 - 0{,}416294\ V_1 - 0{,}597827\ V_2 - 1{,}117013\ V_3 + \\ + 23{,}121414\ d$$

în care:

Iv reprezintă indicele de vîscozitate Dean Davis

V_1 — vîscozitatea cinematică la 50°C (liniarizată)

V_2 — vîscozitatea cinematică la 37,8°C (liniarizată)

V_3 — vîscozitatea cinematică la 98,9°C (liniarizată)

d — densitatea uleiului la 15/4.

Coeficientul de corelaţie multiplă este 0,987, deci foarte apropiat de 1. Eroarea standard este egală cu 0,559, iar coeficientul de variaţie este 0,622.

Avînd în vedere cele de mai sus, propunem ca relaţia determinată de autori să fie utilizată în literatura tehnică de specialitate astfel:

$$Iv = 128{,}9020 - 0{,}4163\ V_1 - 0{,}5978\ V_2 - 1{,}1170\ V_3 + 23{,}1214\ d. \quad (5)$$

În tabelul 4 se prezintă imprimanta cu rezultatele obţinute prin programul REMUS.

---

* S-a utilizat programul REMUS (Regresie Multiplă Selectivă) elaborat în cadrul Laboratoarelor Catedrei de cibernetică economică — Academia de studii economice [5].

Tabelul 4

EQUATION OF VARIABLE 1 I

VARIABLE NAME	VAR NO	REGRESSION COEFF.
CONSTANT		128.902328
V1	2	−.416294
V2	3	−.597827
V3	4	−1.117013
D	5	23.121414
MULTIPLE CORRELATION COEFF. MULTIPLE DETERMINATION STANDARD ERROR VARIATION COEFFICIENT		.987 97.383 .559 .622

EXEMPLU DE APLICARE A RELAȚIEI

Să presupunem că un ulei are următoarea calitate:

densitatea la 15/4 = 0,8956

V_1 = vîscozitate 50°C = 12,2°E

V_2 = vîscozitate 37,8°C = 182,6 cst

V_3 = vîscozitate 98,9°C = 14,8 cst.

Cu ajutorul nomogramei 5 din [3] se convertește vîscozitatea din °E în cst, rezultînd 12,2°E = 99 cst.

Apoi, cu ajutorul tabelului III.8 din [1], se citesc valorile liniarizate obținîndu-se:

$$V_1 = 12{,}2°C = 99 \text{ cst} = 33{,}13;$$

$$V_2 = 182{,}6 \text{ cst} = 34{,}97;$$

$$V_3 = 14{,}8 \text{ cst} = 25{,}92.$$

Înlocuind aceste valori în (5) rezultă:

$$Iv = 128{,}9020 - 0{,}4163 \times 33{,}13 - 0{,}5978 \times 34{,}97 - 1{,}1170 \times$$
$$\times 25{,}92 + 23{,}1214 \times 0{,}8956 = 85{,}96.$$

Determinarea practică a indicelui de vîscozitate (*Iv*) în laborator conform STAS, 55-58, a condus la valoarea de 86. Rezultă o diferență de 0,04 unități de *Iv* — diferență practic neglijabilă.

Principala calitate a metodei propuse, în afară de expeditivitatea calculului *Iv*, este precizia obținută și anume:

Eroare de repetabilitate
(același aparat și operator) = $\pm$ 0,5 unități *Iv*.
Eroare de reproductibilitate
(aparate și operatori diferiți) = $\pm$ 1 unități *Iv*.

BIBLIOGRAFIE

1. MANEA MĂNESCU, DUMITRU V., IONESCU V., BĂRBATU GH.: *Programarea matematică în industria petrolieră*. București, Editura Academiei R.S.R., 1970.
2. * * * *Produse petroliere — Metode de analiză* (Colecție STAS-p. 337) Biblioteca Standardizării, seria tehnică A, 1965.
3. BĂRBATU I. GH., SILCU GH.: *Tehnica exportului de produse petroliere în porturi maritime*. București, Editura tehnică, 1964.
4. PESCARU GH.: *Contribuții la optimizarea fabricării uleiurilor finite*. Teză de doctorat, 1976 (Manuscris nepublicat).
5. * * * *Aplicații ale ciberneticii economice în industria chimică*. București, Editura Academiei R.S.R., 1973.

1.X.1975

SORIN GRINDEA
JUDITA SAMUEL
Centrul de statistică matematică

Un model de creştere economică cu funcţia-scop depinzînd explicit de nivelul fondurilor de producţie*

Autorii tratează problema ratei optime a investiţiilor folosind un model de creştere economică a cărei funcţie de producţie este liniară, iar funcţia de utilitate depinde atît de nivelul consumului cît şi de nivelul fondurilor de producţie. Se deduc condiţiile necesare şi suficiente de optimalitate cu ajutorul cărora se construieşte un algoritm pentru calculul traiectoriei optime. Ultimul paragraf prezintă cîteva concluzii ce reies din rezolvarea mai multor exemple numerice.

1. INTRODUCERE

În cele ce urmează, vom prezenta un model unisectorial de creştere economică, cu variabile discrete. Deosebirea esenţială dintre acest model şi cele îndeobşte cunoscute în literatura economico-matematică constă în aceea că în performanţa modelului intervine în mod explicit nivelul fondurilor fixe pentru fiecare an al orizontului de planificare, pe cînd, în majoritatea modelelor cunoscute, performanţa depinde numai de nivelul consumului.

Motivarea economică a introducerii fondurilor fixe în expresia funcţiei de utilitate este următoarea:

În modelele unisectoriale clasice, cu variabile discrete, performanţa are, în general, forma:

$$V_1 = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{U}(C_n),$$

* Acest articol a fost pus în discuţia Seminarului de programare matematică a Centrului de statistică matematică Bucureşti, cu care ocazie profesorii B. Bereanu şi V. Urseanu au dat unele sugestii valoroase. Cu această ocazie ne exprimăm viile noastre mulţumiri.

unde $\mathcal{U}(\cdot)$ este funcția de utilitate a consumului, iar C_n este consumul la momentul n.

Dacă nu s-ar impune o restricție finală de tipul $K_N \geqslant \omega$ asupra nivelului fondurilor fixe, atunci maximul performanței s-ar obține în cazul cînd rata acumulării, de la un moment $n_0 < N$ încolo, ar lua valoarea sa minimă admisă. Evident, o asemenea soluție este inacceptabilă, deoarece ar handicapa evoluția economiei dincolo de perioada de planificare luată în considerare.

Alegerea mărimii „ω" este însă, în mare măsură, arbitrară și, în orice caz, exogenă modelului.

Alegînd însă o performanță de tipul

$$V_2 = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{U}(C_n, K_n),$$

adică introducînd în mod explicit în structura funcției de utilitate mărimea fondurilor fixe, se asigură ca traiectoria optimă rezultată să realizeze o evoluție armonioasă, fără salturi, a fondurilor fixe.

Pe de altă parte, cu cît nivelul economic atins, măsurat prin mărimea fondurilor fixe, este mai mare, cu atît este mai mare posibilitatea satisfacerii nevoilor societății, deci performanța de tipul V_2 caracterizează mai bine aspirațiile societății.

Corespunzător considerațiilor de mai sus, vom face următoarele ipoteze referitoare la funcția de utilitate $\mathcal{U}(x, y)$:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \geqslant 0; \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \geqslant 0.$$

De asemenea, vom presupune că funcția $\mathcal{U}(x, y)$ este supusă legii randamentelor descrescătoare, în raport cu ambele variabile, adică:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} \leqslant 0; \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} \leqslant 0.$$

Pentru modelul MUBELIN (Model Unisectorial cu funcție de utilitate de tip Bernoulli și funcție de producție LINiară) care va fi descris și analizat în cele ce urmează, am ales o funcție de utilitate de tip special care, pe lîngă proprietățile enumerate mai sus mai are și proprietatea de a fi omogenă de grad I, și anume funcția

$$\mathcal{U}(C_n, K_n) = C_n^{1-\alpha} K_n^{\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1.$$

2. SISTEME GENERALE DE COMANDĂ CU VARIABILE DISCRETE

2.1. Descrierea sistemului de comandă

Un sistem de comandă cu variabile discrete este caracterizat prin următoarele elemente:

a) Ecuația de stare (vectorială) care este de forma

$$x_{n+1} = f_n(x_n, u_n); \quad n = 0, \ldots, N - 1$$

unde x_n este vectorul variabilelor de stare la momentul n, $x_n \in R^q$, iar u_n este vectorul parametrilor de comandă la momentul n, $u_n \in U \subset R^p$.
b) Restricții (condiții izoperimetrice) care sînt de forma:

$$I_j = \sum_{n=0}^{N-1} \mathfrak{L}_{jn}(x_n, u_n) \leqslant 0; \quad j = 1, ..., s'$$

$$I_j = \sum_{n=0}^{N-1} \mathfrak{L}_{jn}(x_n, u_n) = 0; \quad j = s' + 1, ..., s.$$

c) Condiții inițiale și finale, care sînt de forma: $x_0 = \omega_0$; $x_N \leqslant \omega_N$.
d) Funcția-scop

$$I_0 = \sum_{n=0}^{N-1} \mathfrak{L}_{0n}(x_n, u_n).$$

2.2. Formularea problemei de optim și condiții necesare de optimalitate

Definiția 1. Secvența de comenzi $\{u_n\}_{n=0}^{N-1}$ se numește *admisă*, dacă soluția corespunzătoare a ecuației de stare verifică condiția inițială și condiția finală, precum și condițiile izoperimetrice.

Definiția 2. Secvența de comenzi $\{u\}_{n=0}^{N-1}$ se numește *optimă* dacă soluția corespunzătoare $\{\tilde{x}\}_{n=0}^{N-1}$ realizează minimul funcției-scop în clasa comenzilor admise.

Teorema 2.1. (Principiul maximului pentru sisteme discrete)
Fie $\{\tilde{u}_n\}_{n=0}^{N-1}$ o secvență de comenzi optime și $\{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{N-1}$ soluția corespunzătoare a ecuației de stare. Atunci există multiplicatorii $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_j \geqslant 0$ pentru $j = 1, ..., s + q$, nu toți nuli,

$$\lambda_j I_j(\tilde{u}_n) = 0, \; j = 1, ..., s'; \; \lambda_{s+i}(\tilde{x}_N^i - \omega_N^i) = 0^*, \; i = 1, ..., q,$$

astfel încît, dacă vectorul $\tilde{\psi}_n$ este soluția sistemului dual

$$\psi_{n-1} = \psi_n A_n - \sum_{k=0}^{s} \lambda_k b_n^k; \; \tilde{\psi}_{N-1}^i = -\lambda_{s+i}; \quad i = 1, ..., q$$

unde

$$A_n = \frac{\partial f_n}{\partial x}(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n)$$

$$b_n^k = \frac{\partial \mathfrak{L}_{kn}}{\partial x}(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n)$$

și dacă cu acest vector $\tilde{\psi}_n$ definim hamiltonianul

$$H_n(x, u, \tilde{\psi}_n) = \tilde{\psi}_n f_n(x, u) - \sum_{k=0}^{s} \lambda_k \mathfrak{L}_{kn}(x, u)$$

---

* Cu z^i am notat componenta i a vectorului z.

avem

$$\frac{\partial H_n}{\partial u}(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n, \tilde{\psi}_n)(u - \tilde{u}_n) \leqslant 0$$

pentru orice u admisibil; $0 \leqslant n \leqslant N - 1$.

3. DESCRIEREA MODELULUI MUBELIN. CONDIȚII NECESARE ȘI SUFICIENTE DE OPTIMALITATE.

3.1. **Modelul**

Vom face următoarele ipoteze referitoare la elementele modelului:

a) Funcția de producție este liniară în variabila K și independentă de L : $F(K, L) = \beta K$, unde cu K am notat nivelul fondurilor de producție, iar cu L nivelul forței de muncă.

b) Funcția de utilitate are o formă analogă cu cea a funcției de producție Coob-Douglas:

$$\mathcal{U}(C, K) = C^{1-\alpha} K^{\alpha}; \quad 0 \leqslant \alpha < 1$$

unde cu C s-a notat consumul.

c) Parametrul de comandă este rata acumulării, u, care ia valori în intervalul închis $[\gamma, \delta]$; $0 \leqslant \gamma < \delta \leqslant 1$.

Cu aceste precizări, obținem următorul model unisectorial:

$$\begin{cases} K_{n+1} = (1 - \mu + u_n \beta) K_n, \quad n = 0, \ldots, N-1; \; K_0 > 0 \text{ dat} \\ u_n \in [\gamma, \delta] \\ max \sum_{n=0}^{N-1} C_n^{1-\alpha} K_n^{\alpha} \end{cases}$$

unde cu μ s-a notat coeficientul uzurii fizice și morale a fondurilor fixe.

Observație

Ținînd seama de relația $C_n = (1 - u_n)\beta K_n$, funcția-scop se poate scrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{N-1} K_n [(1 - u_n)\beta]^{1-\alpha}.$$

3.2. **Condiții necesare de optimalitate**

Modelul MUBELIN este un caz particular de sistem de comandă, în care nu apar restricții izoperimetrice și nici condiție finală. Hamiltonianul sistemului este:

$$H_n(K, u, \tilde{\psi}_n) = \tilde{\psi}_n(1 - \mu + \beta u)K + \lambda_0 \mathcal{U}[(1 - u)\beta K, K]$$

unde $\widetilde{\psi}_n$ este soluția ecuației duale

$$\psi_{n-1} = \psi_n(1 - \mu + \beta\widetilde{u}_n) + \lambda_0\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\widetilde{C}_n, \widetilde{K}_n)(1 - \widetilde{u}_n)\beta + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\widetilde{C}_n, \widetilde{K}_n)\right]$$

cu condiția $\widetilde{\psi}_{N-1} = \lambda_1$.

Din teorema 2.1 avem următoarele informații asupra multiplicatorilor λ_0 și $\lambda_1 : \lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_1 \geqslant 0; \quad \lambda_0 + \lambda_1 > 0$.

Din faptul că modelul nu are condiție finală impusă variabilei de stare K, rezultă $\lambda_1 = 0$, deci $\lambda_0 > 0$. Fără a reduce generalitatea, putem lua $\lambda_0 = 1$. Hamiltonianul devine

$$H_n = \widetilde{\psi}_n(1 - \mu + \beta u)K + \mathcal{U}[(1 - u)\beta K, K] =$$
$$= K\{\widetilde{\psi}_n(1 - \mu + \beta u) + [\beta(1 - u)]^{1-\alpha}\},$$

iar ecuația duală

$$\text{a)}\ \widetilde{\psi}_{n-1} = \widetilde{\psi}_n(1 - \mu) + \beta\widetilde{u}_n\left[\widetilde{\psi}_n - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\widetilde{C}_n, \widetilde{K}_n)\right] +$$
$$+ \beta\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\widetilde{C}_n, \widetilde{K}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\widetilde{C}_n, \widetilde{K}_n).$$

În concluzie, condițiile necesare de optim devin:

$$\text{b)}\ \frac{\partial H_n}{\partial u}(\widetilde{K}_n, \widetilde{u}_n, \widetilde{\psi}_n)(u - \widetilde{u}_n) = \beta\widetilde{K}_n\left[\widetilde{\psi}_n - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\widetilde{C}_n, \widetilde{K}_n)\right](u - \widetilde{u}_n) \leqslant 0$$

$$\text{c)}\ \widetilde{\psi}_{n-1} = 0.$$

3.3 Suficiența condițiilor necesare de optim pentru modelul MUBELIN

Teorema 3.1

Condițiile necesare de optim pentru modelul MUBELIN sînt și condiții suficiente de optim. Soluția optimă este unică.

Demonstrație

Fie $\{\hat{K}_n, \hat{C}_n, \hat{u}_n\}_{n=0}^{N-1}$ o traiectorie admisă și $\hat{\psi}_n$ variabila duală corespunzătoare, care satisfac condițiile a), b) și c) de mai sus și fie $\{K'_n, C'_n, u'_n\}_{n=0}^{N-1}$ o traiectorie admisă arbitrară.

Vom evalua diferența

$$\Delta = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{U}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) - \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{U}(C'_n, K'_n).$$

$$\Delta = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathcal{U}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) - \mathcal{U}(C'_n, K'_n)) = \sum_{n=0}^{N-1} \Big\{ \mathcal{U}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) - \mathcal{U}(C'_n, K'_n) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{U}^{*)}}{\partial y} (\hat{C}_n, \hat{K}_n)(\hat{K}_n - K'_n) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} (\hat{C}_n, \hat{K}_n)(\hat{K}_n - K'_n) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} (\hat{C}_n, \hat{K}_n)[(\beta \hat{K}_n - \hat{C}_n - \hat{u}_n \beta \hat{K}_n) - (\beta K'_n - C'_n - u'_n \beta K'_n)] -$$

$$- \hat{\psi}_n[(\hat{K}_{n+1} - \hat{K}_n + \mu \hat{K}_n - \beta \hat{u}_n \hat{K}) - (K'_{n+1} - K'_n + \mu K'_n - \beta u'_n K'_n)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \Big\{ \Big[\mathcal{U}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) - \mathcal{U}(C'_n, K'_n) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} (\hat{C}_n, \hat{K}_n)(\hat{C}_n - C'_n) -$$

$$- \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} (\hat{C}_n, \hat{K}_n)(\hat{K}_n - K'_n) \Big] + \beta \Big[\hat{\psi}_n - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} (\hat{C}_n, \hat{K}_n) \Big] (\hat{u}_n \hat{K}_n - u'_n K'_n) +$$

$$+ \Big[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} (\hat{C}_n, \hat{K}_n) + \beta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} (\hat{C}_n, \hat{K}_n) - \mu \hat{\psi}_n \Big] (\hat{K}_n - K'_n) \Big\} -$$

$$- \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\psi}_n[(\hat{K}_{n+1} - \hat{K}_n) - (K'_{n+1} - K'_n)].$$

Vom scrie ultima sumă din expresia de mai sus sub o formă convenabilă:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \hat{\psi}_n (K_{n+1} - K_n) = \sum_{n=1}^{N-1} \hat{\psi}_n K_{n+1} - \sum_{n=1}^{N-1} \hat{\psi}_{n-1} K_n + \sum_{n=1}^{N-1} K_n [\hat{\psi}_{n-1} - \hat{\psi}_n] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \hat{\psi}_n K_{n+1} - \sum_{n=0}^{N-2} \hat{\psi}_n K_{n+1} + \sum_{n=1}^{N-1} K_n [\hat{\psi}_{n-1} - \hat{\psi}_n] =$$

$$= - \hat{\psi}_0 K_1 + \hat{\psi}_{N-1} K_N + \sum_{n=1}^{N-1} K_n [\hat{\psi}_{n-1} - \hat{\psi}_n].$$

Ținînd seama că $\hat{\psi}_{N-1} = 0$, avem

$$\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\psi}_n [K_{n+1} - K_n] = \hat{\psi}_0 (K_1 - K_0) - \hat{\psi}_0 K_1 + \sum_{n=1}^{N-1} K_n [\hat{\psi}_{n-1} - \hat{\psi}_n];$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\psi}_n [\hat{K}_{n+1} - \hat{K}_n] = - \hat{\psi}_0 \hat{K}_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \hat{K}_n [\hat{\psi}_{n-1} - \hat{\psi}_n];$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\psi}_n [K'_{n+1} - K'_n] = - \hat{\psi}_0 K'_n + \sum_{n=1}^{N-1} K'_n [\hat{\psi}_{n-1} - \hat{\psi}_n].$$

---

* Am notat cu $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}$ derivata parțială a funcției $\mathcal{U}(C, K)$ în raport cu prima, respectiv cu a doua variabilă.

Întrucît cele două traiectorii au aceeaşi condiţie iniţială, avem:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\psi}_n[(\hat{K}_{n+1} - \hat{K}_n) - (K'_{n+1} - K'_n)] = \sum_{n=1}^{N-1} (\hat{K}_n - K'_n)(\hat{\psi}_{n-1} - \hat{\psi}_n)$$

Luînd în considerare formula de mai sus, diferenţa

$$\Delta = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{U}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) - \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{U}(C'_n, K'_n)$$

capătă următoarea formă:

$$\Delta = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\mathcal{U}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) - \mathcal{U}(C'_n, K'_n) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}_n, \hat{K}_n)(\hat{C}_n - C'_n) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}_n, \hat{K}_n)(\hat{K}_n - K'_n) \right] + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ -\hat{\psi}_{n-1} + \hat{\psi}_n - \mu\hat{\psi}_n + \hat{u}_n\beta \left[\hat{\psi}_n - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) \right] + \beta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) \right\} (\hat{K}_n - K'_n) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N-1} \beta K'_n \left[\hat{\psi}_n - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) \right] (\hat{u}_n - u'_n).$$

A doua sumă din expresia de mai sus este nulă, conform condiţiei a), iar a treia sumă este nenegativă, conform condiţiei b). Rămîne să arătăm că prima sumă este strict pozitivă, dacă cele două traiectorii pe care le comparăm sînt distincte.

Vom începe cu următoarea observaţie: Dacă $\delta < 1$ atunci, pentru orice traiectorie admisă, $(C_n, K_n) \in \mathfrak{L}$, $\forall n$, unde $\mathfrak{L} = \{(C, K) \in R^2 \mid C > 0,\ K > 0\}$. Într-adevăr, valoarea minimă posibilă a lui K_n s-ar obţine pentru $u_0 = u_1 = \ldots = u_{n-1} = \gamma$, deci am avea

$K_n = (1 - \mu + \beta\gamma)^n K_0 > 0$, oricare ar fi $\gamma \geqslant 0$.

În ceeea ce priveşte pe C_n, avem

$$C_n = (1 - u_n)\beta K_n \geqslant (1 - \delta)\beta K_n > 0.$$

Dacă însă $\delta = 1$, este posibil să avem, pe o traiectorie admisă, $C_n = 0$ (corespunzător lui $u_n = 1$).

Conform observaţiei de mai sus, în evaluarea diferenţelor

$$D_n = \mathcal{U}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) - \mathcal{U}(C'_n, K'_n) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}_n, \hat{K}_n)(\hat{C}_n - C'_n) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}_n, \hat{K}_n)(\hat{K}_n - K'_n)$$

vom distinge două cazuri posibile:

i) $\delta = 1$ şi $C'_n = 0$;

ii) $\delta < 1$ sau $\delta = 1$ şi $C'_n > 0$.

În raționamentul ce urmează vom omite scrierea indicilor n, întrucît raționamentul este valabil pentru orice n $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$.

Cazul i)

Dacă $C' = 0$, atunci $\mathcal{U}(C', K') = 0$. Din proprietatea de omogenitate de grad I a funcției de utilitate rezultă, conform formulei lui Euler, următoarea egalitate:

$$\mathcal{U}(\hat{C}, \hat{K}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}, \hat{K})\,\hat{C} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}, \hat{K})\,\hat{K}.$$

Prin urmare,

$$D = \mathcal{U}(\hat{C}, \hat{K}) - \mathcal{U}(C', K') - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}, \hat{K})(\hat{C} - C') - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}, \hat{K})(\hat{K} - K') =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}, \hat{K})\,K' > 0.$$

Menționăm că, din condiția b) pe care am presupus că o verifică traiectoria $\{\hat{K}_n, \hat{C}_n, \hat{u}_n\}_{n=0}^{N-1}$ rezultă $\hat{C}_n > 0$, respectiv $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}_n, \hat{K}_n)$ finită. Într-adevăr, $\hat{C}_n = 0$, adică $\hat{u}_n = 1$, ar implica

$$\hat{\psi}_n \geqslant \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(0, \hat{K}_n) = +\infty.$$

Cazul ii)

Conform observației de mai sus, $(\hat{C}_n, \hat{K}_n) \in \mathfrak{L}$, oricare ar fi n. De asemenea, $(C'_n, K'_n) \in \mathfrak{L}$, din ipoteză.

Să notăm cu $\hat{z}$ vectorul $(\hat{C}, \hat{K})$, respectiv cu z' vectorul (C', K'). Întrucît $\mathfrak{L}$ este o mulțime deschisă și convexă, mulțimea

$$\mathcal{J} = \{\lambda \mid z' + \lambda(\hat{z} - z') \in \mathfrak{L}\}$$

este un interval al dreptei reale, și anume un interval deschis care conține numerele 0 și 1 (deoarece z' și $\hat{z}$ aparțin lui $\mathfrak{L}$).

Definim pe $\mathcal{J}$ funcția numerică

$$g(\lambda) = \mathcal{U}[C(\lambda), K(\lambda)]$$

unde

$$C(\lambda) = C' + \lambda(\hat{C} - C'); \quad K(\lambda) = K' + \lambda(\hat{K} - K').$$

Avem:

$$\frac{dg}{d\lambda}(\lambda) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}[C(\lambda), K(\lambda)](\hat{C} - C') + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}[C(\lambda), K(\lambda)](\hat{K} - K')$$

și

$$\frac{d^2g}{d\lambda^2}(\lambda) = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}[C(\lambda), K(\lambda)](\hat{C} - C')^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x \partial y}[C(\lambda), K(\lambda)](\hat{C} - C')(\hat{K} - K') +$$

$$+ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2}[C(\lambda), K(\lambda)](\hat{K} - K')^2 = -\alpha(1-\alpha)[K(\lambda)]^{\alpha-2}[C(\lambda)^{-(\alpha+1)}[K(\lambda)(\hat{C} -$$

$$- C') - C(\lambda)(\hat{K} - K')]^2 \leqslant 0.$$

Rezultă că $\frac{dg}{d\lambda}(\cdot)$ este descrescătoare pe $\mathcal{J}$.

Avem

$$\mathcal{U}(\hat{C}, \hat{K}) - \mathcal{U}(C', K') = g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{dg}{d\lambda} d\lambda \geqslant \frac{dg}{d\lambda}(1) =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}, \hat{K})(\hat{C} - C') + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}, \hat{K})(\hat{K} - K').$$

Am arătat deci că, pentru orice n $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, expresia D_n este nenegativă. Prin aceasta am terminat demonstrația suficienței condițiilor necesare de optim.

Pentru a demonstra unicitatea traiectoriei optime, vom arăta că, pentru cel puțin un indice n $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$, expresia D_n este strict pozitivă. Vom delimita din nou cele două cazuri discutate mai sus.

i) Dacă $\delta = 1$ și dacă pentru cel puțin un indice n avem $u_n' = 1$, atunci

$$D_n = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}_n, \hat{K}_n) K_n' > 0.$$

ii) Să presupunem că $u_n' < 1$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Dacă traiectoriile pe care le comparăm sînt distincte, atunci există cel puțin un indice m, astfel încît $\hat{u}_m \neq u_m'$. Avem:

$$\frac{\hat{C}_m}{\hat{K}_m} = (1 - \hat{u}_m)\beta; \qquad \frac{C_m'}{K_m'} = (1 - u_m')\beta.$$

Prin urmare,

$$\frac{\hat{C}_m}{\hat{K}_m} \neq \frac{C_n'}{K_m'}.$$

Din inegalitatea de mai sus rezultă că $K_m(\lambda)(\hat{C}_m - C_m') \neq C_m(\lambda)(\hat{K}_m - K_m')$. Prin urmare, funcția $g_m(\lambda) = \mathcal{U}[C_m(\lambda), K_m(\lambda)]$ are derivata a doua strict negativă pe $\mathcal{J}$, deci funcția $\frac{dg_m}{d\lambda}(\cdot)$ este strict descrescătoare, ceea ce implică

$$\mathcal{U}(\hat{C}_m, \hat{K}_m) - \mathcal{U}(C_m', K_m') = g_m(1) - g_m(0) > \frac{dg_m}{d\lambda}(1) =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{C}_m, \hat{K}_m)(\hat{C}_m - C_m') + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(\hat{C}_m, \hat{K}_m)(\hat{C}_m - K_m').$$

Explicitînd condiția de optim b), vom distinge următoarele cazuri:

b.1.

$\widetilde{u}_n = \gamma \Leftrightarrow \widetilde{\psi}_n \leqslant (1-\alpha)[\beta(1-\gamma)]^{-\alpha}$

b.2

$\widetilde{u}_n = \delta \Leftrightarrow \widetilde{\psi}_n \geqslant (1-\alpha)[\beta(1-\delta)]^{-\alpha}$

b.3

$\widetilde{u}_n \in (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \widetilde{\psi}_n = (1-\alpha)[\beta(1-\widetilde{u}_n)]^{-\alpha}$.

Corespunzător celor trei situații de mai sus, ecuația variabilei duale devine

$$\psi\,\text{a)} \quad \widetilde{\psi}_{n-1} = \widetilde{\psi}_n[1-\mu+\beta\gamma] + [\beta(1-\gamma)]^{1-\alpha}$$

$$\psi\,\text{b)} \quad \widetilde{\psi}_{n-1} = \widetilde{\psi}_n[1-\mu+\beta\delta] + [\beta(1-\delta)]^{1-\alpha}$$

$$\psi\,\text{c)} \quad \widetilde{\psi}_{n-1} = \widetilde{\psi}_n\left[1-\mu+\frac{\beta}{1-\alpha}-\frac{\alpha\beta\widetilde{u}_n}{1-\alpha}\right].$$

Întrucît, din condiția finală 2), avem $\widetilde{\psi}_{N-1} = 0 < (1-\alpha)[\beta(1-\gamma)]^{-\alpha}$, rezultă $\widetilde{u}_{N-1} = \gamma$.

Presupunînd, în continuare, că $\widetilde{u}_{N-2} = \widetilde{u}_{N-3} = \ldots = \widetilde{u}_{N-m} = \gamma$ și rezolvînd ecuația cu diferențe ψa), obținem:

i)

$$\widetilde{\psi}_{N-p-1} = \frac{(1-\mu+\beta\gamma)^p - 1}{\beta\gamma-\mu}[\beta(1-\gamma)]^{1-\alpha}$$

$p = 0,1, \ldots, m$, dacă $\beta\gamma \neq \mu$, sau

ii)

$$\widetilde{\psi}_{N-p-1} = p[\beta(1-\gamma)]^{1-\alpha}$$

$p = 0, 1. \ldots, m$, dacă $\beta\gamma = \mu$.

Observăm că $\widetilde{\psi}_{N-p-1}$ crește odată cu p, așa că este posibil ca, la un moment dat, inegalitatea

$$\widetilde{\psi}_{N-p-1} \leqslant (1-\alpha)[\beta(1-\gamma)]^{-\alpha}$$

să nu se mai păstreze.

Fie m ultimul întreg pentru care avem inegalitatea de mai sus, adică

$$\widetilde{\psi}_{N-m-1} \leqslant [\beta(1-\gamma)]^{-\alpha}(1-\alpha)$$

$$\widetilde{\psi}_{N-m-2} > [\beta(1-\gamma)]^{-\alpha}(1-\alpha).$$

Avem

i)

$$m = \left[\frac{\ln[\beta(1-\alpha\gamma) - \mu(1-\alpha)] - \ln\beta - \ln(1-\gamma)}{\ln(1-\mu+\beta\gamma)}\right]$$

dacă $\beta\gamma \neq \mu$, unde cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x și

ii)

$$m = \left[\frac{1-\alpha}{\beta(1-\gamma)}\right]$$

dacă $\beta\gamma = \mu$.

Avem deci $\tilde{u}_{N-m-2} \neq \gamma$.

Există două posibilități:

1) $(1-\alpha)[\beta(1-\gamma)]^{-\alpha} < \tilde{\psi}_{N-m-2} < (1-\alpha)[\beta(1-\delta)]^{-\alpha}$

și atunci

$$\tilde{u}_{N-m-2} \in (\gamma, \delta);$$

2) $\tilde{\psi}_{N-m-2} > [\beta(1-\delta)]^{-\alpha}(1-\alpha)$

și, în acest caz,

$$\tilde{u}_{N-m-2} = \delta.$$

În continuare vom demonstra cîteva propoziții care caracterizează comportamentul soluției optime.

Propoziția 4.1

Dacă $\beta > \mu$, atunci $\tilde{u}_n \in (\gamma, \delta)$ implică $\tilde{\psi}_{n-1} > \tilde{\psi}_n$.

Demonstrație

Dacă $\tilde{u}_n \in (\gamma, \delta)$, atunci avem pentru $\tilde{\psi}_{n-1}$ ecuația ψ_c):

$$\tilde{\psi}_{n-1} = \tilde{\psi}_n\left(1 - \mu + \frac{\beta}{1-\alpha} - \frac{\alpha\beta\tilde{u}_n}{1-\alpha}\right).$$

A demonstra că $\tilde{\psi}_{n-1} > \tilde{\psi}_n$ revine la a arăta că

$$\frac{\beta}{1-\alpha}(1 - \alpha\tilde{u}_n) - \mu > 0.$$

Avem

$$\frac{\beta(1-\alpha\tilde{u}_n)}{1-\alpha} - \mu > \frac{\beta(1-\alpha\delta)}{1-\alpha} - \mu > \beta - \mu > 0.$$

Observație

Ipoteza $\beta > \mu$ este întru totul justificată din punct de vedere economic. Într-adevăr, βK_n reprezintă producția obținută cu fondurile K_n (valoric), pe cînd μK_n reprezintă valoarea fondurilor scoase din uz la momentul n. Inegalitatea $\beta < \mu$ ar însemna că valoarea producției nu este suficient de mare nici măcar pentru a compensa valoarea fondurilor scoase din uz.

Propoziția 4.2

Dacă $\beta > \mu$, atunci $\tilde{u}_n = \delta$ implică $\tilde{u}_{n-1} = \delta$.

Dacă, în plus, $\beta\delta > \mu$, atunci $\tilde{u}_n = \delta$ implică $\tilde{\psi}_{n-1} > \tilde{\psi}_n$.

Demonstrație

Dacă $\tilde{u}_n = \delta$, atunci $\tilde{\psi}_n \geqslant (1 - \alpha)[\beta(1 - \delta)]^{-\alpha}$, iar pentru $\tilde{\psi}_{n-1}$ avem ecuația ψb):

$$\tilde{\psi}_{n-1} = \tilde{\psi}_n (1 - \mu + \beta\delta) + [\beta(1 - \delta)]^{-\alpha}.$$

Din cele de mai sus deducem că $\tilde{\psi}_{n-1} > (1 - \alpha)[\beta(1 - \delta)]^{-\alpha}$, ceea ce implică $\tilde{u}_{n-1} = \delta$.

Într-adevăr,

$$\tilde{\psi}_{n-1} \geqslant (1 - \alpha)[\beta(1 - \delta)]^{-\alpha}\left[1 - \mu + \beta\delta + \frac{\beta(1 - \delta)}{1 - \alpha}\right] >$$

$$> (1 - \alpha)[\beta(1 - \delta)]^{-\alpha},$$

deoarece inegalitatea

$$1 - \mu + \beta\delta + \frac{\beta(1 - \delta)}{1 - \alpha} > 1$$

se reduce la inegalitatea evidentă

$$\beta \cdot \frac{1 - \alpha\delta}{1 - \alpha} > \mu.$$

Dacă, în plus $\beta\delta > \mu$, atunci inegalitatea $\tilde{\psi}_{n-1} > \tilde{\psi}_n$ rezultă imediat din formula ψb).

Observația 1. În general, $\tilde{\psi}_{n_1^*-p}$, $p = 0, 1, ..., n_1^*$, va avea următoarea expresie

$$\tilde{\psi}_{n_1^*-p} = \frac{(1 - \mu + \beta\delta)^p - 1}{\beta\delta - \mu}[\beta(1 - \delta)]^{1-\alpha} + \tilde{\psi}_{n_1^*}(1 - \mu + \beta\delta)^p$$

unde n_1^* este primul întreg pentru care $\tilde{\psi}_n \geqslant (1 - \alpha)[\beta(1 - \delta)]^{-\alpha}$.

Observația 2. Ipoteza $\beta\delta > \mu$ exprimă matematic posibilitatea reproducției lărgite în economia luată în considerare. Într-adevăr, mărimea $\beta\delta K_n$ exprimă investiția brută maximă realizabilă la momentul n, pe cînd mărimea μK_n reprezintă valoarea fondurilor scoase din uz la același moment.

Concluziile propozițiilor precedente pot fi sintetizate în următoarea teoremă:

Teorema 4.1

În cazul general, în comportamentul comenzii optime $\tilde{u}_n$ pentru modelul MUBELIN se disting trei faze, și anume

Faza 1) $\tilde{u}_n = \delta$, $n = 0, 1, ..., n_1^*$

Faza 2) $\tilde{u}_n \in (\gamma, \delta)$, $n = n_1^* + 1, ..., n_2^*$

Faza 3) $\tilde{u}_n = \gamma$, $n = n_2^* + 1, ..., N - 1$.

În funcție de parametrii modelului, una dintre primele două faze sau amîndouă pot lipsi.

Corolar

Comanda optimă $\tilde{u}_n$ este funcție descrescătoare de n.

Demonstrație

Dacă fazele 1) și 2) lipsesc, atunci comanda optimă este constantă, egală cu γ. Dacă lipsește numai faza 2), atunci comanda optimă este constantă pe porțiuni, cu o singură comutare, de la $\tilde{u}_{n^*} = \delta$ la $\tilde{u}_{n^*+1} = \gamma$. Dacă este prezentă și faza 2), atunci situația este următoarea: La primul moment de comutare n_1^*, comanda optimă descrește de la $\tilde{u}_{n_1^*} = \delta$ la $\tilde{u}_{n_1^*+1} \in (\gamma, \delta)$. La cel de-al doilea moment de comutare, n_2^*, comanda optimă descrește de la $\tilde{u}_{n_2^*} \in (\gamma, \delta)$ la $\tilde{u}_{n_2^*+1} = \gamma$.

Mai rămîne de arătat că în faza 2) comanda optimă este descrescătoare. Fie n și $n+1$ două momente succesive în faza 2). Atunci, din condiția de optimalitate ψ_c) avem:

$$\tilde{\psi}_n = (1 - \alpha)[\beta(1 - \tilde{u}_n)]^{-\alpha}$$

$$\tilde{\psi}_{n+1} = (1 - \alpha)[\beta(1 - \tilde{u}_{n+1})]^{-\alpha}$$

deci

$$\tilde{u}_n = 1 - \frac{1}{\beta}\left[\frac{1 - \alpha}{\tilde{\psi}_n}\right]^{1/\alpha}$$

$$\tilde{u}_{n+1} = 1 - \frac{1}{\beta}\left[\frac{1 - \alpha}{\tilde{\psi}_{n+1}}\right]^{1/\alpha}.$$

Conform propoziției 4.1, avem $\tilde{\psi}_{n+1} < \tilde{\psi}_n$. Prin urmare,

$$\tilde{u}_{n+1} < \tilde{u}_n.$$

Observație

În cazul particular $\delta = 1$, comanda $u_n = \delta = 1$ nu poate fi optimă. Într-adevăr, în acest caz condiția de optimalitate b 2 nu poate fi satisfăcută, deoarece

$$\lim_{\substack{\delta \to 1 \\ \delta < 1}} [\beta(1 - \delta)]^{-\alpha} = +\infty.$$

5. ALGORITM PENTRU SOLUȚIONAREA MODELULUI MURELIN

Pasul 1)

1. a) Se calculează diferența $\beta\gamma - \mu$.

1. b) Se calculează

$$m^* = \left[\frac{\ln\{\beta(1 - \alpha\gamma) - \gamma(1 - \alpha)\} - \ln\beta - \ln(1 - \gamma)}{\ln(1 - \mu + \beta\gamma)}\right]$$

dacă $\beta\gamma \neq \mu$,

sau

$$m^* = \left[\frac{1-\alpha}{\beta(1-\gamma)}\right]$$

dacă $\beta\gamma = \mu$; cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x.

1. c) Se calculează $n_2^* = N - m^* - 2$.

Avem $\tilde{u}_{N-1} = \tilde{u}_{N-2} = \ldots = \tilde{u}_{N-m^*-1} = \gamma$.

1. d) Se calculează

$$\tilde{\psi}_{N-m^*-2} = \frac{(1-\mu+\beta\gamma)^{m^*+1} - 1}{\beta\gamma - \mu} \{\beta(1-\gamma)\}^{1-\alpha}$$

dacă $\beta\gamma \neq \mu$, sau

$$\tilde{\psi}_{N-m^*-2} = (m^* + 1)\{\beta(1-\gamma)\}^{1-\alpha}$$

dacă $\beta\gamma = \mu$.

Pasul 2)

Pentru $k = 2, 3, \ldots$

2. a) Se compară $\tilde{\psi}_{N-m^*-k}$ cu $(1-\alpha)\{\beta(1-\delta)\}^{-\alpha}$.

Dacă

$$\tilde{\psi}_{N-m^*-k} \geqslant (1-\alpha)\{\beta(1-\delta)\}^{-\alpha},$$

atunci se trece la pasul 3).

Dacă

$$\tilde{\psi}_{N-m^*-k} < (1-\alpha)\{\beta(1-\delta)\}^{-\alpha}.$$

atunci se trece la 2. b).

2. b) Se calculează

$$\tilde{u}_{N-m^*-k} = 1 - \frac{1}{\beta}\left\{\frac{1-\alpha}{\tilde{\psi}_{N-m^*-k}}\right\}^{1/\alpha}.$$

2. c) Se calculează

$$\tilde{\psi}_{N-m^*-k-1} = \tilde{\psi}_{N-m^*-k}\left\{1 - \mu + \frac{\beta}{1-\alpha} - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\tilde{u}_{N-m^*-k}\right\}.$$

2. d) Se reia pasul 2) cu $k+1$ în loc de k.

Pasul 3)

Fie $k^* \geqslant 2$ primul indice k pentru care

$$\tilde{\psi}_{N-m^*-k} \geqslant (1-\alpha)\{\beta(1-\delta)\}^{-\alpha}.$$

Se calculează $n_1^* = N - m^* - k^*$.
Avem

$$\tilde{u}_{n_1^*} = \tilde{u}_{n_1^*-1} = \ldots = \tilde{u}_0 = \delta.$$

Pasul 4)

Avînd valorile K_0, $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$, ..., $\tilde{u}_{N-1}$,

4. a) Se calculează $\tilde{K}_1$, ..., $\tilde{K}_N$ cu formula

$$\tilde{K}_{n+1} = (1 - \mu + \beta\tilde{u}_n)\,\tilde{K}_n;$$

4. b) Se calculează $\tilde{C}_0$, ..., $\tilde{C}_{N-1}$ cu formula

$$\tilde{C}_n = (1 - \tilde{u}_n)\,\beta\tilde{K}_n;$$

4. c) Se calculează valoarea optimă a funcției-scop, cu formula

$$\tilde{V} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{K}_n\{\beta(1 - \tilde{u}_n)\}^{1-\alpha}.$$

Pe baza algoritmului de mai sus, s-a elaborat un program în limbajul FORTRAN. Concluziile rezultate din rulările acestui program vor fi prezentate în paragraful următor.

6. CONCLUZII REZULTATE DIN RULAREA PROGRAMULUI CU DATE CONVENȚIONALE

Ținînd seama de natura economică a problemei pe care o soluționează modelul MUBELIN, majorității parametrilor modelului trebuie să li se atribuie, în aplicațiile practice, valori determinate pe baza unor considerente economice și date statistice obiective. Astfel, coeficientul β al funcției de producție, precum și coeficientul μ al uzurii fizice și morale a fondurilor fixe trebuie estimați pe baza datelor statistice existente. Alegerea valorilor parametrilor γ și δ care limitează inferior, respectiv superior, domeniul comenzilor admisibile, constituie, în esență, o decizie de politică economică care trebuie fundamentată, în ultimă instanță, tot pe baza unor date economice obiective. Singurul parametru „subiectiv" al modulului este α, coeficientul de elasticitate ce apare în expresia funcției de utilitate.

Aflîndu-ne abia în faza de început a experimentării modelului MUBELIN, am utilizat, la primele rulări ale programului, date convenționale. Consultînd diverse materiale referitoare la problematica abordată de noi, am căutat să atribuim parametrilor modelului valori cît mai „realiste". Astfel, am convenit să atribuim parametrului μ valoarea 0,05, iar parametrului β valori apropiate de 0,3; am luat totuși în considerare și valori mai mari pentru β, în vederea simulării unei varietăți cît mai mari de traiectorii de evoluție.

Desigur, pentru valori mari ale lui β, aceste traiectorii sînt nerealiste din punct de vedere economic.

În ceea ce privește alegerea valorilor parametrilor γ și δ, într-o primă etapă am făcut simulări cu valorile lor extreme: $\gamma = 0$ și $\delta = 1$. Desigur, din punct de vedere economic nu se justifică o asemenea abordare, întrucît trebuie asigurat, la orice moment, un nivel minimal al consumului, care să facă posibilă reproducția forței de muncă din economie. Alegerea domeniului $[0, 1]$ pentru valorile parametrului de decizie devine însă acceptabilă, dacă dăm o interpretare ușor modificată parametrului u, și anume considerăm că u este cota alocată acumulării nu din întregul venit național, ci din partea venitului național rămasă după ce s-a scăzut partea corespunzătoare nivelului minimal al consumului populației.

Într-o abordare ulterioară, am atribuit parametrilor γ și δ valorile 0,1, respectiv 0,4. După cum rezultă din calcule, în această situație avem (cu o singură excepție, varianta II. 5) comanda optimă de tip „bang-bang", adică comanda optimă ia numai valorile sale extreme admise. Pentru a obține soluții mai puțin banale, intenționăm să lărgim, în rulările ulterioare, domeniul de variație a lui u.

În alegerea orizontului de prognoză, N, precum și a valorii inițiale a fondurilor de producție, K_0, ne-am bazat pe două proprietăți ale modelului MUBELIN, proprietăți ce rezultă din omogenitatea de grad I a funcției de utilitate:

1) Să presupunem că avem două variante ale modelului MUBELIN, care diferă între ele numai prin mărimea orizontului de prognoză. Fie N_1, N_2, orizontul de prognoză pentru varianta 1, respectiv varianta 2; $N_1 < N_2$. Atunci secvența de comenzi optime pentru varianta 2 în perioada $[N_2 - N_1, N_2]$ coincide cu secvența de comenzi optime pentru varianta 1.

2) Secvența comenzilor optime pentru modelul MUBELIN nu depinde de mărimea inițială a fondurilor fixe, K_0.

Bazîndu-ne pe prima proprietate enunțată mai sus, am considerat că nu este relevantă rularea programului în mai multe variante relativ la valoarea lui N. Am optat pentru o unică valoare, $N = 30$, considerînd că o valoare relativ mare a orizontului de prognoză oferă o mai bună posibilitate de urmărire a evoluției comenzii optime.A doua proprietate enunțată mai sus ne-a îndreptățit ca, în această primă etapă a experimentării modelului, să atribuim lui K_0 valori arbitrare, fără a afecta prin aceasta concluziile de principiu ce rezultă din aplicarea modelului.

În cele două tabele de mai jos sînt sintetizate rezultatele cele mai semnificative obținute la primele două rulări ale programului. Dintre variantele primei rulări le-am eliminat pe acelea în care parametrului β i se atribuiseră valori exagerat de mari, reținînd doar variantele I.4, I.5, I.6, I.7, I.8 și I.10. Menționăm că și în cazul variantelor I.7, I.8 și I.10 se obțin valori neverosimile din punct de vedere economic pentru ritmurile de creștere a fondurilor fixe, respectiv pentru nivelul final al acestora.

RULAREA I

$\gamma = 0$; $\delta = 1$; $K_0 = 1.000$; $\mu = 0{,}052$

Varianta	α	β	Comportarea comenzii optime	K_{30}
I.4	0,945	0,215	Descreşte de la $u_0 = 0{,}999$ la $u_{26} = 0{,}931$; $u_{27} = 0{,}888$; $u_{28} = 0{,}763$; $u_{29} = 0$.	67.070
I.5	0,800	0,215	Descreşte de la $u_0 = 0{,}999$ la $u_{23} = 0{,}91$; $u_{24} = 0{,}88$ $u_{25} = 0{,}83$; $u_{26} = 0{,}76$; $u_{27} = 0{,}6$ $u_{28} = 0{,}08$; $u_{29} = 0$.	48.860
I.6	0,715	0,215	Descreşte de la $u_0 = 0{,}999$ la $u_{23} = 0{,}88$; $u_{24} = 0{,}84$; $u_{25} = 0{,}77$; $u_{26} = 0{,}66$; $u_{27} = 0{,}41$; $u_{28} = u_{29} = 0$.	43.570
I.7	0,643	0,643	Descreşte de la $u_0 = 0{,}999$ la $u_{26} = 0{,}944$; $u_{27} = 0{,}86$; $u_{28} = 0{,}59$; $u_{29} = 0$.	509.033.750
I.8	0,487	0,503	Descreşte de la $u_0 = 0{,}999$ la $u_{25} = 0{,}954$; $u_{26} = 0{,}896$; $u_{27} = 0{,}735$; $u_{28} = u_{29} = 0$.	25.703.740
I.10	0,500	0,500	Descreşte de la $u_0 = 0{,}999$ la $u_{25} = 0{,}953$; $u_{26} = 0{,}894$; $u_{27} = 0{,}736$; $u_{28} = u_{29} = 0$.	24.227.600

RULAREA II

$\beta = 0{,}33$; $\mu = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}1$; $\delta = 0{,}4$; $K_0 = 1.000$

Varianta	α	COMANDA optimă	C_0	C_{29}	K_{30}	Funcţia-scop
II.1	0,9	$u_n = 0{,}4$; $n = 0, ..., 28$ $u_{29} = 0{,}1$.	198	2919	9663	100.297
II.2	0,8	$u_n = 0{,}4$; $n = 0, ..., 28$ $u_{29} = 0{,}1$.	198	2919	9663	85.607
II.3	0,7	$u_n = 0{,}4$; $n = 0, ..., 27$ $u_{28} = u_{29} = 0{,}1$	198	2653	8779	73.177
II.4	0,6	$u_n = 0{,}4$; $n = 0, ..., 27$ $u_{28} = u_{29} = 0{,}1$.	198	2653	8779	62.676
II.5	0,5	$u_n = 0{,}4$; $n = 0, ..., 26$ $u_{27} = 0{,}351$ şi $u_{28} = u_{29} = 0{,}1$.	198	2613	8649	53.698

Rularea II (continuare)

Varianta	α	COMANDA optimă	C_0	C_{20}	K_{30}	Funcţia-scop
II.6	0,4	$u_n = 0{,}4$; $n=0, \ldots, 26$ $u_{27} = u_{28} = u_{29} = 0{,}1$.	198	2410	7976	46.092
II.7	0,3	$u_n = 0{,}4$; $n=0, \ldots, 26$ $u_{27} = u_{28} = u_{29} = 0{,}1$.	198	2410	7976	39.621
II.8	0,2	$u_n = 0{,}4$; $n=0, \ldots, 26$ $u_{27} = u_{28} = u_{29} = 0{,}1$.	198	2410	7976	34.069
II.9	0,1	$u_n = 0{,}4$; $n=0, \ldots, 25$ $u_n = 0{,}1$; $n = 26, 27, 28, 29$.	198	2189	7246	29.341
II.10	0,0	$u_n = 0{,}4$; $n=0, \ldots, 25$ $u_n = 0{,}1$; $n = 26, 27, 28, 29$	198	2189	7246	25.311

Observăm că la rularea I, unde domeniul comenzilor admise este maxim, şi anume intervalul [0, 1], comanda optimă ia, la majoritatea momentelor, valori din intervalul deschis (0, 1); de altfel, am menţionat în paragrafele 3 şi 4 că $u = 1$ nu poate fi comandă optimă. La rularea II, unde domeniul comenzilor admise este mult mai restrîns, întîlnim însă situaţia opusă; cu excepţia variantei II.5, în toate celelalte variante avem comanda optimă de tip „bang-bang". În ceea ce priveşte varianta II.10, soluţia de tip „bang-bang" este justificată din punct de vedere teoretic, deoarece ne aflăm în cazul-limită cînd funcţia de utilitate se reduce la o funcţie liniară: $\mathcal{U}(C) = C$. Pentru celelalte variante considerăm însă că acest tip de soluţie nu este singurul posibil, ci este o consecinţă a modului în care am ales parametrii modelului, şi în special ai domeniului restrîns de variaţie a comenzii.

În ceea ce priveşte evoluţia în timp a fondurilor fixe, se observă că, deşi nu am impus nici o condiţie asupra nivelului lor final, ele au o evoluţie armonioasă şi preponderent ascendentă (cu excepţia unui număr mic de momente de la sfîrşitul perioadei de prognoză). În tabelele de mai jos apar ritmurile medii anuale de creştere a fondurilor fixe, pentru toate variantele luate în considerare.

Varianta	I.4	I.5	I.6	I.7	I.8	I.10
Ritmul mediu anual al fondurilor	15,5%	13,8%	13,4%	55%	40,2%	40%

Varianta	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5	
Ritmul mediu anual al fondurilor	7,6%	7,6%	7,3%	7,3%	7,2%	

Varianta	II.6	II.7	II.8	II.9	II.10	
Ritmul mediu anual al fondurilor	7%	7%	7%	6,8%	6,8%	

În cele ce urmează, ne vom referi numai la rularea II, la care avem mai multe informații, întrucît s-a editat și valoarea consumului la fiecare moment, precum și valoarea funcției-scop pentru fiecare variantă. De asemenea, întrucît cele zece variante diferă între ele numai prin valorile parametrului α, putem trage anumite concluzii referitoare la senzitivitatea traiectoriei optime în raport cu acest parametru.

În tabelul de mai jos sînt date ritmurile medii anuale de creștere a consumului pentru variantele II.1—II.10.

Varianta	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5
Ritmul mediu anual al consumului	9,7%	9,7%	9,4%	9,4%	9,3%

Varianta	II.6	II.7	II.8	II.9	II.10
Ritmul mediu anual al consumului	9%	9%	9%	8,6%	8,6%

În încheiere, remarcăm că senzitivitatea modelului concret analizat în raport cu parametrul α este mică. Se observă că variantele II.1—II.10, deși corespund unor valori distincte ale lui α, se grupează în perechi sau chiar triplete de variante care prezintă comportamente identice ale traiectoriei optime. Se observă, totuși, că toate elementele specificate în tabelul RULAREA II (valoarea finală a consumului, valoarea finală a fondurilor, ca și valoarea optimă a funcției-scop) sînt funcții crescătoare de α.

BIBLIOGRAFIE

1. ALTĂR M.: *Un model de prognoză a creşterii economice cu variabile discrete, avînd funcţia de producţie liniară.* Studii şi cercetări de calcul economic şi cibernetică economică, nr. 1, 1975.
2. BOSE S.: *Optimal Growth and Investment Allocation.* Review of Economic Studies, XXXV, 1968.
3. CASS D.: *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation.* Review of Economic Studies, XXXII, 1965.
4. DOBRESCU E.: *Corelaţia dintre acumulare şi consum.* Editura politică, Bucureşti, 1971.
5. IOFFE A. D., TIHOMIROV V. M.: *Teoriia ekstremalnih zadaci.* Nauka, Moscova, 1974.
6. PONTREAGHIN L. S., BOLTEANSKI V. G., GAMKRELIDZE R. D., MIŞCENKO, E. F.: *Matematiceskaia teoriia optimalnih proţessov.* Fizmatghiz, Moscova, 1961.
7. ROCKAFELLAR R.: *Convex Analysis.* Princeton University Press, 1970.

13.II.1976

ÎN AJUTORUL CELOR CE DORESC SĂ SUSȚINĂ EXAMENUL DE ADMITERE LA FACULTĂȚILE A.S.E.

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. *Să se determine termenul care îl conține pe* a^6 *din dezvoltarea binomului*

$$\left(a\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$$

știind că diferența dintre coeficienții termenilor al treilea și al doilea este 35.

Indicație: Condiția din enunț se scrie

$$C_n^2 - C_n^1 = 35 \text{ sau } n^2 - 3n - 70 = 0$$

care are rădăcinile $n = 10$; $n = -7$(nu). Avem:

$$T_{k+1} = C_{10}^k (a\sqrt[3]{a})^{10-k}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k = C_{10}^k a^{\frac{4(10-k)}{3}-\frac{k}{2}}.$$

Se scrie condiția: $\frac{4(10-k)}{3} - \frac{k}{2} = 6$ de unde $k = 4$.

Prin urmare $T_5 = 210\, a^6$.

2. *Fie funcția*

$$f(x) = (m-1)x^2 - (2m+1)x + 1$$

unde m *este un parametru real.*

a) *Să se arate că oricare ar fi* $m \neq 1$ *graficul funcției* f *taie axa* Ox *în două puncte distincte.*

b) *Să se determine* n *astfel ca rădăcinile ecuației* $f(x) = 0$ *să fie mai mici ca* 1.

Indicație: a) Pentru $m = 1$ ecuația se reduce la una de gradul I. Astfel, pentru $m \neq 1$ trebuie ca $\Delta > 0$. Deci:

$$\Delta = 4m^2 + 5 > 0 \text{ pentru orice } m \in \mathbf{R}.$$

b) Condițiile ca rădăcinile ecuației să fie mai mici decît 1, sînt $\Delta \geqslant 0$, $af(1) > 0$; $-\frac{b}{2a} < 1$.

În funcție de m, aceste condiții conduc la:

$$4m^2 + 5 \geqslant 0;\quad (m-1)(-m-1) > 0;\quad \frac{3}{2(m-1)} < 0.$$

De unde rezultă $m \in (-1, 1)$.

Un alt mod de a rezolva b) este de a face substituția $y = 1 - x$ și deoarece $x_1, x_2 < 1$, rezultă $y_1 = 1 - x_1 > 0$, $y_2 = 1 - x_2 > 0$. Scriem ecuația în y:

$$(m - 1)(1 - y)^2 - (2m + 1)(1 - y) + 1 = 0$$

sau

$$(m - 1)y^2 + 3y - m - 1 = 0.$$

Condițiile ca $y_1, y_2 > 0$ sînt $\Delta \geqslant 0$, $p > 0$, $s > 0$ etc.

3. *Fie ecuația*

$$6x^4 + (3m - 23)x^3 + (28 - 4m)x^2 - (5m + 13)x + 2(m + 1) = 0$$

unde m este un număr întreg.

a) *Să se arate că ecuația are două rădăcini raționale independente de m.*

b) *Să se determine m astfel ca suma inverselor rădăcinilor ecuației date să fie egală cu 2.*

Indicație: a) Avem:

6	$3m - 23$	$28 - 4m$	$-5m - 13$	$2m + 2$	$\frac{1}{3}$
6	$3m - 21$	$21 - 3m$	$-6m - 6$	0	2
6	$3m - 9$	$3m + 3$	0		

deci cele două rădăcini sînt $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = 2$. Celelalte două rădăcini vor fi date de ecuația

$$2x^2 + (m - 3)x + m + 1 = 0.$$

b) Din condiția $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 2$ rezultă:

$3 + \frac{1}{2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4} = 2$ sau $\frac{3 - m}{m + 1} = -\frac{3}{2}$. Deci $6 - 2m = -3m - 3$ de unde rezultă $m = -9$.

4. *Să se determine m, n, p astfel încît polinomul*

$$x^5 - 2x^4 - 6x^2 + mx^2 + nx + p$$

să fie divizibil prin polinomul $(x-3)(x^2+1)$

Indicație: Se pun condițiile: $P(1) = 0$; $P(-1) = 0$; $P(3) = 0$ de unde rezultă sistemul:

$$m + n + p = 7$$

$$m - n + p = -3$$

$$9m + 3n + p = 81$$

ale cărei soluții sînt: $m = 8$, $n = 5$, $p = -6$.

5. *La o expoziție se prezintă un produs în 3003 exemplare. Se intenționează aranjarea produsului în formă de triunghi astfel încît pe prima linie să fie un exemplar, pe a doua linie două exemplare etc. În cîte rînduri se va expune produsul respectiv.*

Indicație: Avem:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = 3003$$

sau $\frac{x(x+1)}{2} = 3003$. Ecuația

$$x^2 + x - 6006 = 0$$

are o rădăcină $x_1 = 77$ și o rădăcină negativă care nu convine.

6. *Să se determine limita șirului*

$$U_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1}} - \sqrt{n - \sqrt{n-2}}.$$

Indicație:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n-1}} - \sqrt{n - \sqrt{n-2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}}{\sqrt{n + \sqrt{n-1}} + \sqrt{n - \sqrt{n-2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n-1}{n-2}} + 1}{\sqrt{\frac{n + \sqrt{n-1}}{n-2}} + \sqrt{\frac{n - \sqrt{n-2}}{n-2}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

7. *Se dă sistemul de ecuații:*

$$(m+1)x - my = 1$$

$$(2m+1)x - y = m + 2$$

unde m este un parametru real.

a) *Să se determine m astfel încît rădăcinile sistemului dat să fie proporționale cu numerele 2 și 3.*

b) *Să se rezolve sistemul pentru m determinat mai sus.*

Indicație:

a) $D = \begin{vmatrix} m+1 & -m \\ 2m+1 & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 1$

$D \neq 0$, pentru $m \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m+2 & -1 \end{vmatrix} = m^2 + 2m - 1;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2m+1 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 + m + 1.$$

Deci: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2 + 2m - 1}{2m^2 - 1}$; $y = \frac{D_y}{D} = \frac{m^2 + m + 1}{2m^2 - 1}$.

Din condiția $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ rezultă $m_1 = 1$, $m_2 = -5$.

b) Pentru $m_1 = 1$ se obține $x_1 = 2$, $y_1 = 3$.

Pentru $m_2 = -5$ se obține $x_2 = \frac{2}{7}$, $y_2 = \frac{3}{7}$.

8. *Să se rezolve sistemul:*

$$\sqrt[y]{4^x} = 2^5 \sqrt[x]{8^y}$$

$$\sqrt[y]{3^x} = 3 \sqrt[y]{3^{2(1-y)}}.$$

Indicație: Sistemul dat se poate scrie:

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^{5+\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3^{1+\frac{2-2y}{y}} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x} \\ \frac{x}{y} = 1 + \frac{2-2y}{y} \end{cases}$$

Notînd $\frac{x}{y} = t$ prima ecuație devine $2t = 5 + \frac{3}{t}$ sau $2t^2 - 5t - 3 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = 3$, $t_2 = -\frac{1}{2}$ deci:

$$\frac{x}{y} = 3 \text{ și } \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \text{ sau } x = 3y \text{ și } x = -\frac{1}{2}y.$$

Pentru $x = 3y$ obținem $x_1 = \frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$; iar pentru $x = -\frac{1}{2}y$ se obține $x_2 = -2$, $y_2 = 4$.

9. *Să se calculeze determinantul:*

$$D \| \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Indicație: $D = (a+b+c)^3$.

10. *Fie M_k mulțimea matricelor de forma:*

$$M_k = \left\{ \begin{Vmatrix} x & y \\ ky & x \end{Vmatrix} \middle| \; x, y \in Z \right\}$$

unde k este un număr întreg fixat, iar Z reprezintă mulțimea numerelor întregi.

a) *Să se arate că suma a două matrice din M_k aparține lui M_k.*

b) *Să se arate că produsul a două matrice din M_k aparține lui M_k.*

Indicație: a) Fie: $A = \begin{Vmatrix} x & y \\ ky & x \end{Vmatrix}$ și $B = \begin{Vmatrix} x' & y' \\ ky' & x' \end{Vmatrix}$ din M_k

$$A + B = \begin{Vmatrix} x + x' & y + y' \\ k(y + y') & x + x' \end{Vmatrix} \in M_k.$$

b) $AB = \begin{Vmatrix} x & y \\ ky & x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' & y' \\ ky' & x' \end{Vmatrix} =$

$$= \begin{Vmatrix} xx' + kyy' & xy' + yx' \\ k(yx' + xy') & kyy' + xx' \end{Vmatrix} \in M_k$$

11. *Să se verifice că pătratele numerelor* $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 1$, $x^2 + 2x - 1$ *sînt în progresie aritmetică și să se afle rația.*

Indicație: Fie: $a = (x^2 - 2x - 1)^2$, $b = (x^2 + 1)^2$, $c = (x^2 + 2x - 1)^2$. Într-adevăr $a + c = 2b$

Rația este $r = 4(x^3 - x)$.

12. *Fie*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2px + q}{x - m}$$

unde $x \in \mathbf{R} - \{m\}$, $m, p, q \in \mathbf{R}$.

a) *Dacă graficul nu taie axa* Ox *să se arate că* $f(x)$ *admite un maxim și un minim oricare ar fi* m.

b) *Dacă* $q = 5$, *să se afle* m *și* p *astfel ca* $f(x)$ *să aibă extreme în* $x = -1$ *și* $x = 3$.

Indicație: a) Deoarece $f(x)$ nu taie axa Ox rezultă $p^2 - q < 0$.

$$'(x) = \frac{x^2 - 2mx - 2mp - q}{(x - m)^2}.$$

Din $f'(x) = 0$ rezultă $x^2 - 2mx - 2mp - q = 0$ cu realizantul $\Delta = m^2 + 2mp + q$; $s > 0$ deoarece $p^2 - q < 0$.

b) Avem:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2px + 5}{x - m}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2mx - 2mp - 5}{(x - m)^2}.$$

Din condiția $f'(-1) = 0$ rezultă $m = \frac{2}{1 - p}$; iar din condiția $f'(x) = 0$ rezultă $m = \frac{2}{3 + p}$. De unde se obține: $\frac{2}{1 - p} = \frac{2}{3 + p}$ deci: $3 + p = 1 - p$ adică $p = -1$ și $m = 1$.

ECONOMIE POLITICĂ

1. A. Necesitatea conducerii planificate a economiei. Proporțiile economice și proporționalitatea. Rolul economic al statului socialist.

B. 1. Ce se înțelege prin nivel de trai? (Definire).

2. Aveți următoarele date:
   — capitalul constant = 1.000.000 dolari;
   — capitalul variabil = 200.000 dolari;
   — plusvaloarea = 300.000 dolari.
   Calculați rata plusvalorii.
   Ce exprimă rata plusvalorii?

3. Enumerați principalele căi de intensificare a producției agricole.

4. Ce se înțelege prin capital financiar? (Definire).

5. Enumerați principiile relațiilor dintre țările socialiste.

2. A. Valoarea de întrebuințare și valoarea mărfii în economia socialistă. Acțiunea legii valorii în economia socialistă.

B. 1. Definiți consumul și componentele sale.

2. În ce constă, în principal, rolul economic al statului socialist?

3. Explicați în ce constă retribuția în acord.

4. Formele principale ale producției de mărfuri în condițiile proprietății private asupra mijloacelor de producție.

5. Enumerați factorii principali care determină creșterea productivității muncii în socialism.

3. A. Întreprinderea socialistă de stat: felurile ei; organizarea și conducerea științifică a activității ei; producția globală, producția marfă și producția netă a întreprinderii.

B. 1. Care sînt condițiile care fac din repartiția după muncă o necesitate obiectivă în socialism?

2. Care sînt principalele forme ale colaborării economice din țările socialiste?

3. Ce se înțelege prin relațiile de producție și care sînt elementele lor componente?

4. Definiți venitul național și indicați factorii de creștere a lui.

5. Dispuneți de următoarele date, privind o întreprindere capitalistă:
   a) valoarea forței de muncă utilizată în decurs de o lună = 1.000.000 de dolari
   b) valoarea mijloacelor de producție consumate = 700.000 de dolari
   c) rata plusvalorii = 200%.
   Ținînd seama de cele de mai sus, să se calculeze cantitatea totală de plusvaloare creată în luna respectivă.

FILOZOFIE ȘI SOCIALISM ȘTIINȚIFIC

A. Bază și suprastructură. Dezvoltarea bazei și suprastructurii în condițiile făuririi societății socialiste multilateral dezvoltate și înaintării României spre comunism.

B. Răspundeți, pe scurt, la următoarele întrebări:

1. Ce sînt contradicțiile neantagoniste?

2. Care este definirea legii din punct de vedere filozofic?

3. Caracteristicile principale ale moralei socialiste.

4. De ce practica este criteriul obiectiv și suprem al adevărului?

BAZELE PROGRAMĂRII CALCULATOARELOR

A. Se dă un text pe cartele al cărui sfîrșit este marcat standard (cartela · EOF). Se cere să se stabilească algoritmul (schema logică) pentru numărarea cuvintelor textului. Se precizează următoarele:
   — cuvintele textului sînt separate prin cel puțin un blanc;
   — un cuvînt începe și se termină în interiorul aceleiași cartele;
   — pot exista cuvinte care să se termine în coloana 80 și atunci cuvîntul următor poate începe în coloana 1 a cartelei următoare;

— analiza se va face cartelă cu cartelă.
Să se scrie la imprimantă numărul cuvintelor textului.

B. 1. Scrieți fraza SELECT pentru descrierea unui fișier cu organizarea selectivă.

2. Presupunînd descrierile de date care urmează:

```
77  A   PIC     99V9        VALUE     32.5.
77  B   PIC     999         COMP-3    VALUE 25.
77  ALFA PIC   ZZZ9 · 99 ·
```

a) Indicați și explicați care din instrucțiunile de mai jos sînt corecte:

```
COMPUTE   ALFA    ROUNDED  = A + B
ADD       A       B        GIVING   ALFA
ADD       A       TO       ALFA
```

b) reprezentați conținuturile lui A, B și ALFA după executarea instrucțiunilor corecte

3. Presupunînd un fișier organizat indexat — secvențial, FDISC-IND, a cărui înregistrare este INREGD, scrieți secvența de instrucțiuni care să realizeze ștergerea unei înregistrări.

4. Scrieți condensat (în FORTRAN) următoarea listă de variabile într-o instrucțiune WRITE (secvențial):
A, X(1), X(3), X(5), X(7), I, OMEGA, B(1,1), B(2,1), B(3,1), B(1,2), B(2,2), B(3,2).

5. Dacă pe cartele sînt perforate componentele a doi vectori X și Y de dimensiune N, în maniera: x_1, y_1, x_2, y_2, ..., scrieți instrucțiunea READ (fără instrucțiunea FORMAT) pentru a realiza introducerea lor în memorie.

STATISTICA TEORETICĂ

A. Indicii de grup în formă de medie a indicilor individuali. Conținutul și tehnica calculării lor. Exemple.

B. 1. Ce este o serie statistică? Felurile lor.
2. Arătați tehnica calculării mărimilor relative de structură. Exemple.
3. Arătați tehnica calculării mediei armonice.
4. Calculați coeficientul de variație pentru seria de mai jos.

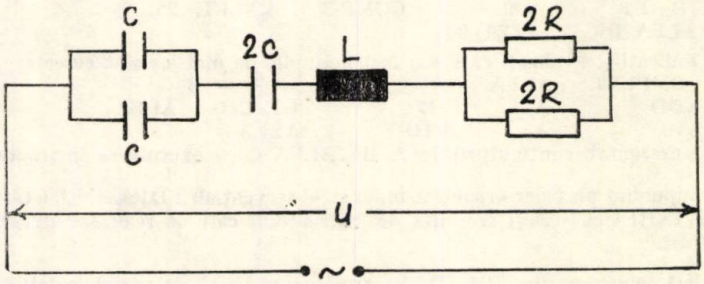
Grupe de muncitori după retribuția primită	Numărul muncitorilor
1400 — 1600	20
1600 — 1800	10
1800 — 2000	40
2000 — 2200	30
Total	100

5. Arătați modul de calcul al indicatorilor medii ai seriilor dinamice din mărimi relative.

FIZICĂ

1. Enunțul legii acțiunii reciproce.
2. Legea lui Arhimede și condiția de plutire a corpurilor.
3. Definiția factorului de amplificare al triodei.
4. Exprimați raza traiectoriei unui electron care se mișcă perpendicular pe liniile unui cîmp magnetic uniform de inducție.
5. Două corpuri (A și B) de dimensiuni neglijabile, pornesc simultan unul către celălalt, pe un plan înclinat de lungime l care face un unghi α cu orizontala. Corpul A este

lăsat să alunece din punctul cel mai înalt al planului, iar corpul B este aruncat cu viteza inițială v_0 de la baza planului. Dacă $\mu(\mu < tg\,\alpha)$ este coeficientul de frecare dintre corpuri și planul înclinat, iar g este accelerația gravitațională, să se determine:
a) timpul după care se întîlnesc;
b) viteza corpului B în momentul întîlnirii cu corpul A.



6. Se dă un circuit electric ca în figura alăturată. Circuitul este alimentat sub o tensiune alternativă (U) de frecvență f. Folosind mărimile indicate pe figură să se calculeze.
a) impedanța circuitului;
b) puterea activă.

CONTABILITATEA TEORETICĂ

1. A. Modificările posturilor de bilanț ca urmare a operațiilor economice, cu prezentarea tipurilor de operații care produc aceste modificări (pentru exemplificarea cifrică, se întocmește un bilanț inițial și cîte un bilanț după fiecare tip de operații).

B. 1 — Verificarea documentelor de evidență.

2 — Enumerați conturile bifuncționale cu precizarea semnificației soldului lor.

3 — Enumerați lucrările premergătoare întocmirii bilanțului și grupele din activul și pasivul bilanțului.

4 — Să se înregistreze în ordine cronologică:

— reținerea din retribuțiile personalului a sumei de 10.000 lei reprezentînd impozitul pe retribuții și a sumei de 1.500 lei reprezentînd contribuțiile personalului pentru pensia suplimentară;

— obținerea și depozitarea produselor finite, preț de cost planificat 100.000 lei, preț de cost efectiv 90.000 lei, cu stabilirea și înregistrarea diferenței dintre aceste prețuri.

— justificarea unui avans spre decontare de 2.000 lei astfel: cu facturi pentru materiale achiziționate 1.300 lei, cu documente de transport și cazare în sumă de 400 lei, cu chitanță privind depunerea la caserie a restului necheltuit de 300 lei.

2. A. Conturile de control al îndeplinirii planurilor. Necesitate, conținutul și funcția lor (cu exemplificări cifrice de înregistrări cronologice, iar pentru conturile de control și sistematice).

B. 1. Principiile calculației prețului de cost efectiv al producției.

2. Enumerați conturile de cheltuieli care pot prezenta sold cu ocazia întocmirii bilanțului.

3. Etapele analizei contabile a operațiilor economice (cu un exemplu de analiză a unei operații).

4. Cu ocazia inventarierii se constată: un plus de mijloace fixe, valoare de inventar 20.000, uzură 3.000 lei; un minus de materiale în depozitele unității, neimputabil, preț de facturare 10.000 lei, cheltuieli de transport — aprovizionare 900 lei; un minus de materiale, imputabil, preț de facturare 1000 lei, cheltuieli de transport — aprovizionare 80 lei; un plus de casă de 400 lei.

Să se înregistreze cronologic regularizarea diferențelor constatate.

Notă. 1. Pentru înregistrări se vor folosi denumirile conturilor, fără a se face analiza contabilă.

2. Nu se vor utiliza planuri de conturi.

STRUCTURA ȘI DINAMICA SISTEMELOR

Ed. Maloine-Doin, Paris, 1976

Volumul apare în colecția „Cercetări interdisciplinare", dirijată de Pierre Delattre și reprezintă lucrările unui seminar interdisciplinar al Colegiului Franței, realizat în colaborare cu Institutul colegial european și cu I.S.M.E.A. Aceste seminarii interdisciplinare se desfășoară sub conducerea unui grup de trei personalități, și anume André Lichenorowicz, membru al Institutului, profesor la Colegiul Franței, François Perroux, profesor la colegiul Franței, director la I.S.M.E.A., Gilbert Gadoffre, director al Institutului colegial european, profesor la Universitatea din Manchester.

Lucrarea redă intervențiile participanților și discuțiile care au urmat. În total, volumul înregistrează opt intervenții, dintre care prima semnată de Ch. Galperine și P. Trotignon, este o introducere care prezintă lucrările.

Prima comunicare propriu-zisă se datorează lui P. Delattre, și se intitulează „Limbajul interdisciplinar și teoria sistemelor".

Autorul, care lucrează la Comisariatul energiei atomice din Franța, arată că limbajul interdisciplinar este o unealtă cu care se poate studia un sistem oarecare. În continuare, el se ocupă de sistemele de transformări și introduce cîteva axiome. Astfel, prima axiomă afirmă că elementele pot fi considerate echivalente, dacă au proprietăți identice. Axioma a doua afirmă că între două clase de date, posibilitățile de transformare pot fi inexistente, în sens unic sau în dublu sens. În continuare, Delattre studiază proprietățile topologice și ordinea într-un sistem de transformări oarecare. De asemenea, se ocupă de categoria sistemelor pentru care natura elementelor este precizată, studiază structura unui sistem de transformări și relațiile structură-funcție.

A doua intervenție se ocupă de stabilitatea structurală și catastrofe, autorul fiind însuși creatorul teoriei catastrofelor și anume profesor René Thom, de la Institutul de înalte studii științifice.

Autorul își propune să schițeze programul unei teorii morfologice. În mod evident, nivelul este mai ridicat și abordarea este bogată în idei, ținînd seama de faptul că Thom a creat această teorie a punctelor singulare privind evoluția sistemelor, care se dovedește a fi atît de fecundă în înțelegerea realității în domenii foarte diferite, ca embriologie, comportamentul animalelor, tratamentul nevrozelor etc.

Următoarea intervenție este semnată de J. L. Lions, membru al Academiei de științe, profesor la Universitatea Paris VI și membru

la IRIA. Numele lui Lions este bine cunoscut specialiștilor; el are lucrări apreciate în rezolvarea numerică a problemelor, teoria reglajului optim etc.

Autorul se ocupă de așa-numitele sisteme mari, în particular de așa numitele probleme bine puse, în sensul lui Hadamard. Începe prin a se ocupa de ecuațiile de stare, după care trece la problemele criteriilor privind alegerea unei strategii de rezolvare. Enumeră apoi unele metode, cum ar fi compresia ecuației de stare, simplificarea acesteia, metode de compoziție și de coordonare.

Henri Atlan, tot de la Universitatea Paris VI este autorul comunicării „Modele dinamice în rețea și sursele de informare în biologie". Se abordează, printre altele, problema ciclului de sinteze al proteinei, probleme privind termodinamica în rețele — metodă dezvoltată recent de Aharon Katchalsky, George Oster și Alan Perelson — pentru a trece apoi la grafe de legături și reacții chimice. În continuare, autorul se ocupă de unele probleme privind difuzia și transportul, controlul și reglarea în rețelele fizico-chimice, teorema lui Tellegen și rețele cu structuri variabile.

André Martinet se ocupă de „Economie și dinamica limbajelor". În mod evident, se pune în discuție lingvistica postsaussuriană, făcînd să intervină și alte nume binecunoscute ca Chomsky, Shannon etc.

Maurice Gross, de la Universitatea Paris — Vincennes și de la Laboratorul de automatică documentară și lingvistică, a prezentat lucrarea „Metode empirice în sintaxă". El abordează unele probleme privind clasificarea distribuțională, transformările, studiile exhaustive în lingvistică.

Ultima comunicare, datorată lui André Malan, este o dare de seamă asupra colocviului de la Saclay, organizat de Institutul colegial european, pe tema „Științe, structuri, structuralism".

Se arată cum a fost interpretată noțiunea de structură de către matematicieni, ce se înțelege prin structură în științele fizice, în biologie, și în general în științele exacte. De asemenea, se fac unele referiri la istoria științelor, menționînd unele cercetări de astronomie și altele privind originea structuralismului în științele umane. Totodată, se prezintă un scurt istoric al termenului de structură în lingvistică, după care se fac referiri la structuralism în științele sociale. Se arată care este aportul economiei la termenul de structură și se amintește de critica structuralistă în literatura modernă.

Prin varietatea materialului prezentat în acest volum, numeroase categorii de cititori pot fi interesați de el. Este în primul rînd un volum de idei, care prezintă metode principiale — cum ar fi teoria catastrofelor. Tocmai prin aceasta, unele nume majore, cum ar fi Thom și Lions, în domeniul matematicii, sau al lui Delattre în domeniul teoriei structurii, atrag pe specialist, ca și pe cel care dorește să se inițieze în problematica structurii și dinamicii sistemelor.

Lectura este plăcută, fără multe dificultăți tehnice — acestea sînt reduse practic la zero, în schimb, cuprinderea în volum a discuțiilor purtate fac ca cititorul să participe mai direct la desfășurarea ideilor.

Lucrarea prezintă interes pentru economiști, matematicieni, biologi, filozofi, pentru toți cei care se interesează de sisteme, de structură și de dinamică, dar și de istoria ideilor majore din știință.

Din toate punctele de vedere, publicarea acestui volum reprezintă un succes, în primul rînd al organizatorilor colocviului și al colecției „Cercetări interdisciplinare".

În epoca noastră, specializarea și hiperspecializarea ridică pericolul unei ultraspecializări, în care cercetătorul, prins de problemele propriului său domeniu, să nu mai poată avea o privire de ansamblu asupra unor domenii majore ale științei.

Cercetările și colocviile interdisciplinare sînt ocazii fericite pentru cercetători din domenii diferite, care le permite confruntarea ideilor și punctelor de vedere, eventual un schimb încrucișat de metode,ceea ce nu poate să reprezinte decît un beneficiu major pentru toate domeniile cunoașterii umane.

Prof. dr. docent Ed. Nicolau

G. F. Hice, W.S. Turner — Ph.D., L. F. Cashwell

SYSTEM DEVELOPMENT METHODOLOGY

(*Metodologia elaborării sistemelor informatice*)

North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxdord, 1974, 370 pagini

Domeniul analizei, proiectării şi realizării sistemelor informatice cunoaşte astăzi o dezvoltare deosebită. De la apariţia calculatoarelor de generaţia a III-a şi pînă în prezent, interesul pentru elaborarea unor tratate, ghiduri şi instrucţiuni metodologice privind realizarea sistemelor informatice a crescut foarte mult. Publicaţiile apărute pe plan mondial, vizînd acest domeniu, nu au izbutit să satisfacă în întregime cerinţele metodologice, să acopere toate aspectele care conduc la realizarea sistemelor informatice. Din acest motiv, astăzi, nu poate fi vorba de o metodologie completă şi general valabilă în domeniul informaticii. Aşa se explică diversitatea de opinii, metodologii şi practici existente în informatică. Lacunele literaturii existente trebuie căutate, însă, şi în rapida evoluţie a sistemelor de prelucrare automată a datelor, care, înregistrînd şi noi principii metodologice, produce întîrzierea apariţiei la timp a documentaţiei, sau, în cel mai bun caz, apar incomplet descrise.

Cartea pe care o prezentăm înlătură în mare măsură golurile amintite, reuşind, pe de o parte, a trata în întregime toate fazele şi etapele necesare realizării sistemelor informatice, iar pe de altă parte, serveşte specialiştilor drept ghid metodologic de ordin practic. Reunind o bogată experienţă în domeniu, autorii descriu în cele 7 capitole fazele şi etapele ce trebuie parcurse pentru realizarea şi dezvoltarea sistemelor informatice, utilizînd o descriere de la simplu la complex.

Primul capitol se ocupă de studiul şi analiza de sistem, dezvoltînd metodele şi procedeele aferente, de la definirea temei, determinarea resurselor necesare trecerii la un nou sistem, pînă la stabilirea cerinţelor de intrare şi ieşire pentru noul sistem, ocupîndu-se în acelaşi timp şi de problemele de planificare şi organizare a activităţilor implicate de la demarare pînă la finalizarea sistemului proiectat.

În cel de-al doilea capitol, autorii se ocupă de „proiectarea preliminară" care se referă la delimitarea aplicaţiilor, descrierea subsistemelor, definirea cerinţelor de hardware şi software, a fişierelor şi bazelor de date, la proiectarea la nivel logic a structurii fişierelor şi bazelor de date, la definirea tehnicilor de acces (şi alegerea acestora), precum şi la planificarea şi organizarea activităţilor care trebuie să conducă la implementarea sistemelor.

Proiectarea de detaliu formează obiectul celui de al III-lea capitol. Sînt trecute în revistă, pe lîngă indicaţiile metodologice şi procedeele sau tehnicile necesare în proiectarea intrărilor/ieşirilor, a bazei de date la nivel fizic etc. şi elementele necesare pentru definirea programelor pentru subsisteme. De asemenea, sînt specificate cerinţele de software, sînt descrise documentaţiile ce trebuie să însoţească proiectul, precum şi o

serie de elemente, privind crearea și întreținerea bazelor de date (descrierea, crearea, actualizarea și exploatarea fișierelor, descrierea subrutinelor și programelor utilitare etc.).

În celelalte capitole sînt detaliate metodele de testare a sistemului proiectat, sînt prevăzute condițiile de preluare a sistemului de către utilizatori (școlarizarea, instrucțiuni de utilizare etc.), procedeele de implementare (planificarea și organizarea implementării, elaborarea documentației ș.a.). În ultimul capitol sînt descrise metodele și procedeele de lucru în noul sistem și cele de menținere în funcționare și dezvoltare a sistemului informatic implementat (introducerea unor noi aplicații pe calculator, extinderea echipamentelor ș.a.).

Elaborată, ținînd seama de concepția sistemică și de tehnicile moderne de prelucrare a datelor (multiprogramare, time-sharing, teleprelucrare), cartea „Metodologia elaborării sistemelor informatice" vine în sprijinul specialiștilor informaticieni prin aceea că oferă un arsenal metodologic general valabil, fără a fi dictat de anumite tipuri de sisteme informatice, de a numite tipuri de configurații de echipamente sau formulare tipizate de analiză și proiectare. Cartea este bine ilustrată, conținînd și 200 note bibliografice selectate și un index de termeni.

R. Homescu

E. Bernard — Weyl

L'ARC ET LA CORDE, UN MODELE D'ANTAGONISMES DIALECTIQUES EN BIOLOGIE ET SCIENCES HUMAINES

Ed. Maloine, Paris, 1975

În ultimul timp, interesul oamenilor de știință pentru fenomenele economice este în continuă creștere. Dacă secolele trecute au fost marcate de înflorirea științelor naturii, în ultimul timp se constată o dezvoltare foarte pronunțată a științelor sociale, printre care economia are un rol privilegiat.

Situația este pe deplin explicabilă. Științele naturii fac să intervină factori care sînt mai ușor de identificat, iar relațiile dintre acești factori sînt de asemenea relativ simple. Din contră, fenomenele sociale sînt cu mult mai complexe, iar intervenția conștiinței umane dă o trăsătură particulară acestui gen de activități. La aceasta trebuie adăugată și modalitatea diferită de experimentare. În științele naturii, experimentul se realizează relativ ușor. În științele vieții, experimentarea este mai dificilă. Dificultatea crește cu cîteva ordine de mărime atunci cînd ne raportăm la domeniul economic.

Modelul la care ne referim a fost elaborat de E. Bernard — Weyl, medic asistent al spitalelor din Paris, lucrarea intitulîndu-se „Arcul și coarda", volum apărut în colecția „Cercetări interdisciplinare", colecție care apare sub conducerea lui Pierre Delattre.

De la început trebuie să remarcăm faptul că cercetările interdisciplinare apar astăzi ca una din căile cele mai promițătoare de dezvoltare a științei. Reamintim că economistul J. Tinbergen a început prin a studia fizica matematică abordînd după aceasta problemele economice. Tocmai această grefare a unor metodici elaborate într-un domeniu ca economia a condus la acele rezultate importante care au fost încununate cu premiul Nobel.

De altminteri, în epoca noastră, specializarea a devenit atît de pronunțată încît, practic, este necesar să se recurgă la cercetări interdisciplinare și pluridisciplinare.

Modelul la care ne referim a fost elaborat pe funcția neuroendocrină, dar domeniul de aplicare este cu mult mai larg.

În esență, în acest model intervin doi factori cu acțiune opusă, u fiind rezultanta acțiunii acestor factori. Se poate considera că $u = x - y$, dacă atribuim factorilor valori pozitive sau, din contră, $u = x + y$, dacă un factor este pozitiv, iar celălalt negativ. Acestor două variabile, x și y, considerate ca factori endogeni, li se asociază alți doi factori exogeni, S și V. Se introduce o nouă variabilă $r = S - V$.

Modelul matematic este descris, în prima aproximație prin următoarele ecuații: $x = mu$, $y = nu$.

În a doua aproximație, putem scrie:

$x = (m + pu)u \qquad y = (n + qu)u.$

Dacă se introduce condiția $u = x - y$, se găsește un sistem de ecuații care permite determinarea lui u ca funcție de timp.

Sistemul precedent poate să fie corectat, înlocuind în ultimele ecuații precedente pe u prin $u' + r$, unde r este o funcție de timp.

După valorile date coeficienților, sistemul de reglaj va avea diferite comportări.

Autorul propune de asemenea și un model mai complex, în care înlocuiește mai întîi pe u prin $x - y$, după care, la ambele ecuații, mai adaugă un termen de forma $(a + bw)w$, unde $w = x + y - m$.

Coeficienții a și b au valori diferite în cele două ecuații.

Acest sistem de ecuații diferențiale neliniare pot fi tratate prin tehnici de calcul numerice. Autorul atrage atenția asupra comportării oscilatorii a soluțiilor modelului, ca și asupra problemei importante privind identificarea parametrilor.

Nu vom insista asupra aplicațiilor biologice, care depășesc scopul nostru. Autorul consideră că modelul poate fi pus în legătură cu perspectiva unei dialectici evoluționiste, care cuprinde, printre altele, analizele care decurg din opera lui Marx. Tocmai de aceea, subtitlul lucrării este „Un model de antagonisme dialectice în biologie și științele umane".

Este necesar să arătăm că, în esență, autorii consideră modelul referitor la doi factori antagoniști, care de exemplu, pot să fie capitaliștii și proletarii.

Ceea ce este interesant de semnalat este faptul că, în această lucrare, este citat și savantul român A. Frenkian, cunoscut umanist. De asemenea, autorul consideră că reglajul se face prin două sisteme de reglaj, teză susținută, după cum se știe, de Paul Constantinescu.

Desigur că, fiind elaborată de un biolog, lucrarea nu este perfectă din punct de vedere macroeconomic. Tema pusă în discuție este însă deosebit de interesantă și merită a fi studiată. Modelul care leagă doi factori antagoniști poate avea numeroase aplicații practice.

Autorul consideră că formalismul său permite explicarea unor modele de echilibru de creștere macroeconomică.

După cum este și firesc, lucrarea se referă la gîndirea dialectică binară, care este urmărită de la Anaximandru la Hegel, dar în același timp recurge și la conceptele moderne ale teoriei sistemelor.

Lectura acestui model stimulează și în orice caz poate forma obiectul unor studii care să valideze sau să invalideze aceste cercetări.

În orice caz, ideea modelării acțiunii reciproce a unor factori antagoniști nu este nouă. În special în biocibernetică s-a studiat acțiunea unor astfel de factori (Reshewsky, Nicolau și Bălăceanu etc.)

Modelul matematic propus de autor, este însă diferit, astfel încît el trebuie să fie cunoscut tuturor celor care se interesează de cibernetică de matematică sau de tehnică.

Prof. dr. docent Edmond Nicolau

W. Busse van Colbe, G. Lassmann

BETRIEBSWIRTSCHAFTSTHEORIE, BAND I, GRUNDLAGEN, PRODUKTIONS UND KOSTENTHEORIE

(Teoria economiei întreprinderii, vol. I, Noțiuni de bază, Teoria producției și a costurilor)

Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975

Lucrarea recenzată este volumul I al cursului de „Teoria economiei întreprinderiii", predat de autori începînd cu anul 1967 la Universitatea Ruhr din Bochum. Caracterul de curs universitar al lucrării este nu numai declarat, dar și realizat consecvent și metodic. Structurarea materiei pe capitole, paragrafe, puncte și subpuncte corespund ritmului impus de cerințele desfășurării procesului didactic. Claritatea expunerii este multiplicată și de alte calități. Astfel, numărul mare de grafice și figuri ce însoțesc textul ilustrează prin mijloace specifice expunerea, contribuind totodată la o mai bună înțelegere pe baza reprezentării intuitive. Lucrarea oferă un material bogat și judicios organizat pentru lucrările aplicative; în acest sens, după fiecare paragraf se propun pentru rezolvare un număr mare de probleme și exerciții. Toate acestea demonstrează deosebitele valențe metodice și didactice ale lucrării.

Cursul este croit de problematica întreprinderilor capitaliste din R. F. Germania. Bibliografia citată atît în cursul tratării cît și la sfîrșitul capitolelor cuprinde în cea mai mare parte lucrări și manuale apărute în R. F. Germania. Problematica abordată este grupată pe cele trei capitole ale lucrării astfel: problema de bază (locul „Teoriei economiei întreprinderii" în sistemul științelor, conținutul disciplinei, definirea noțiunii de întreprindere, procesul decizional în întreprindere, modelele utilizate în teoria economiei întreprinderii), teoria producției (bunuri, produse și factori de producție, elementele structurale și ieșirile modelelor de producție, proprietățile funcțiilor de producție și semnificația lor economică, modele de producție cu factori limitați, modele de producție cu factori substituibili, modele cu relații indirecte între factori și produs, modele cu mai multe tehnologii și faze de producție) și teoria costurilor (mărimi care influențează costurile, modele de costuri pe termen scurt cu raporturi directe și indirecte din factori și costuri, modele de costuri pe termen lung, modele de costuri cu variația stocurilor). Tratarea este matematizată și econometrizată într-un grad destul de avansat. Caracterul de manual și limitările inerente de spațiu au pus, evident, restricții serioase în această direcție. Totuși, după aprecierea noastră, lucrarea prezintă interes mai ales metodologic în condițiile amplificării acțiunilor de organizare științifică a producției și a muncii în cadrul întreprinderilor noastre. Pentru specialiștii care activează în domeniul științei întreprinderilor socialiste cursul poate prezenta interes și ca o lucrare reprezentativă a școlii vestgermane de economia întreprinderilor.

Prof. dr. L. Tövissi

CONTENTS

C. BILCIU, G. DIACONESCU, M. MAGDA, C. IONESCU, O. SARBAN
Statistical Data Banks for Managing the Education 3

R. STROE
Planning-Forecasting Interconnection in a Territorial Profile 13

G. BOLDUR-LATESCU
Considerations on Integrating the Decisional Disciplines 27

N. VISINOIU
Variation and Entropy — Optimum Criteria in a Transport Problem with Weights 31

GEORGIA HERA, ARGENTINA FILIP
Queuing Systems with Various Service Intensities 41

AL. ISAIC MANIU, V. BADIN
Statistic Method for Cheking the Homogenity of Products Lots 47

C. NICODA, V. CARNAZIU
The Study of Using the Working Time by the Workers of an Industrial Enterprise 59

G. PESCARU, G. BARBATU, V. IONESCU
Methods for Testing the Viscosity Index with the Aid of Multiple Correlation 67

S. GRINDEA, JUDITA SAMUEL
A Model of Economic Growth with Goal Function Depending Explicitly on the Level of Production Funds 73

Critique and Bibliography

109

SOMMAIRE

C. BILCIU, G. DIACONESCO, M. MAGDA, C. IONESCO, O. SARBAN
Banque de données statistiques pour la direction de l'enseignement 3

R. STROE
Intercorrélation prévisibilité-planification en profil territorial 13

G. BOLDUR-LATESCO
Considérations sur l'intégration des disciplines décisionelles.. 27

N. VISINOIU
Variation et entropie-critères d'optimum dans un problème de transports à poids 31

GEORGIA HERA, ARGENTINA FILIP
Modèle d'attente ayant des intensités différentes de service 41

AL. ISAIC MANIU, V. BADIN
Méthode statistique de vérification de l'homogénéité des groupes de produits 47

C. NICODA, V. CARNAZIU
Etude de l'utilisation du temps de travail des ouvriers d'une entreprise industrielle 59

G. PESCARU, G. BARABATU, V. IONESCO
Méthode de détermination de l'indice de viscosité à l'aide de la corrélation multiple 67

S. GRINDEA, JUDITA SAMUEL
Un modèle de croissance économique à fonction-but explicitement en dépendance du niveau des fonds productifs 73

Critique et bibliographie

СОДЕРЖАНИЕ

К. БИЛЧУ, Г. ДЬЯКОНЕСКУ, М. МАГДА, К. ИОНЕСКУ, О. ШЭРБАН

Банк статистических данных для управления образаованием 3

Р. СТРОЕ

Взаимосвязь прогноз-планирование в территориальном профиле 13

Г. БОЛДУР

Соображения по поводу интеграции дисциплин по принятию решений 27

Н. ВИШИНОЮ

Вариация и энтропия — оптимальные еритерии транспортной проблемы с удельным весом 31

ДЖЕОРДЖИЯ ХЕРА, АГРИПИНА ФИЛИП

Модель массового обслуживания различной интенсивности.... 41

А. ИСАИК МАНИУ, В. БЭДИН

Статистический метод проверки гомегенности сторон производства 47

К. НИКОДА, В. КАРНАЗИУ

Изучение использования рабочего времени рабочими промышленного предприятия 59

Г. ПЕСКАРУ, Г. БЭРБАТУ, В. ИОНЕСКУ

Методы определения показателей вязкости при помощи множественной кореляции 67

С. ГРИНДЯ, Ж. САМУЕЛ .....

Модель экономического роста с целевой функцией, определенно зависимой от уровня производственных фондов..... 73

Критика и библиография

111

SATULDEVACANȚĂ CONSTANȚA

Casă prahoveană și casă doljană

Pe litoral, unde se termină cartierul Tomis-Nord al orașului Constanța și începe stațiunea Mamaia se află un **interesant complex** turistic al cooperației de consum: Satul de vacanță Constanța. Frumusețea inedită a acestuia constă în faptul că este alcătuit din peste 20 de unități de alimentație publică, construite în stilul gospodăriilor țărănești, fiecare reprezentînd specificul unui județ.

Într-o pitorească ambianță folclorică fiecare căsuță oferă oaspeților posibilitatea de a servi micul dejun, prînzul și cina, de a aprecia mîncăruri tradiționale din diferite zone ale țării noastre.

Unele căsuțe, precum și un camping oferă și posibilități de cazare.

În cadrul satului de vacanță funcționează magazine și standuri pentru desfacerea articolelor de plaje și sport, confecții, tricotaje, marochinărie, cosmetice, încălțăminte, articole de uz gospodăresc, precum și o gamă bogată de articole de artizanat.

Lei 15

F 2992

CATEDRA DE CIBERNETICĂ ECONOMICĂ
ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE
BUCUREŞTI

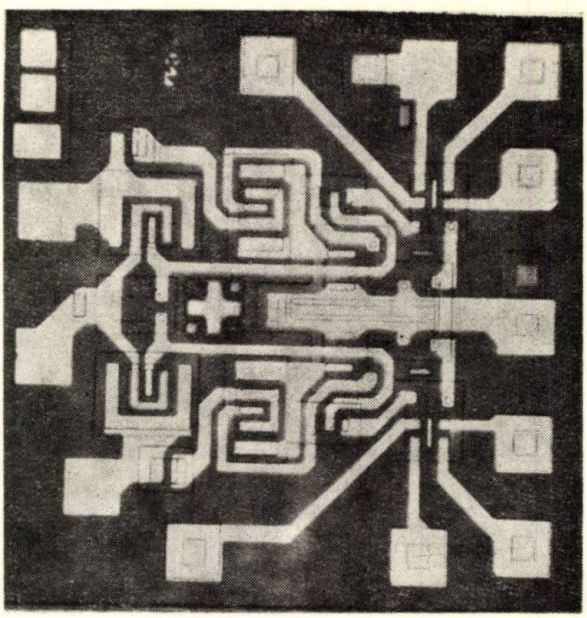
STUDII ŞI CERCETĂRI DE CALCUL ECONOMIC ŞI CIBERNETICĂ ECONOMICĂ

3

1977

I.P.R.S.-BĂNEASA

produce și oferă o largă gamă de circuite integrate din formația T.T.L. serie normală și rapidă.
Aceste circuite sînt realizate în tehnica bipolară și se utilizează în construcția calculatoarelor



ÎNTREPRINDEREA DE PIESE RADIO ȘI SEMICONDUCTORI BĂNEASA

Str. Erou Iancu Nicolae
nr. 32
BUCUREȘTI — ROMÂNIA
telefon 33.38.30
Desfacere/Export 33.53.17
telex 11.203 iprs r

CATEDRA DE CIBERNETICĂ ECONOMICĂ
ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE
BUCUREȘTI

19/8 JAN 76

STUDII ȘI CERCETĂRI DE CALCUL ECONOMIC ȘI CIBERNETICĂ ECONOMICĂ

1977
Calea Dorobanților 15-17
tel. 12.77.08

COLEGIU DE REDACȚIE

Acad. Octav Onicescu, prof. Constantin Ionescu, prof. Mircea Bulgaru, prof. Aristide Halanay, prof. Paul Constantinescu, prof. Edmond Nicolau, Ilie Șalapa, Avram Rosen, Hercule Mănescu, Vasile Biță, Valeriu Pescaru, Mircea Enache, Constantin Bilciu, Moisa Altăr, Vincențiu Dumitru, Vasile Ionescu, Ștefan Mustățea, Radu Homescu, Radu Stroe, Mihai Lutic.

Tiparul executat sub comanda
nr. 4/119 la
Întreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918"
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București,
Republica Socialistă România

1978 JAN 26

SUMAR

V. DUMITRU
Unele rezultate în rezolvarea problemelor de programare neliniară cu calculatorul 5
R. STROE
Dinamica omogenizării dezvoltării teritoriale 21
M. ALEXANDRU
Modele pentru prognoza proceselor din industria minieră 43
C. BARON
Disponibilitatea — indicator al calității produselor 55
LETIȚIA ZAHIU, V. MANOLE
Optimizarea folosirii îngrășămintelor chimice 69
E. STĂICUȚ, A. BARCHANSKI
Considerații asupra proiectării unei interfețe pentru rețele de calculatoare 83
FL. BOIAN
Metoda reducerii și marcajelor pentru rezolvarea problemei transporturilor 95

Critică și bibliografie

Informații științifice

DR. V. DUMITRU
Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

Unele rezultate în rezolvarea problemelor de programare neliniară cu calculatorul*)

În lucrare se prezintă o sinteză a rezultatelor obținute de autor în perioada 1970—1975 în rezolvarea problemelor de programare neliniară. O dată cu unele rezultate cu caracter teoretic sînt prezentate, mai ales, unele concluzii legate de eficiența algoritmilor pentru optimizarea funcțiilor de n variabile și legat de aceasta, eficiența rezolvării problemelor neliniare cu restricții prin tehnica SUMT. Un interes special este acordat algoritmilor de tip mixt.

Programarea matematică neliniară este un domeniu deosebit de actual care antrenează numeroși cercetători.

Eforturile care se fac în acest domeniu sînt considerabile și în mod continuu apar noi articole și cărți ce publică rezultate asupra unora sau altora dintre multiplele aspecte ale problematicii domeniului. Un loc important îl ocupă rezolvarea efectivă, cu ajutorul calculatorului electronic, a problemelor de programare neliniară, cu aspectele ei specifice: timp necesar de pregătire a problemei, timp-mașină de calcul necesar rezolvării în timp util a problemei, acuratețea și siguranța cu care o problemă este rezolvată etc. Preocupările în găsirea unui răspuns la aceste probleme sînt actuale pe plan mondial și în ultimul timp numărul articolelor și cărților publicate în acest domeniu este în continuă creștere. Printre lucrările de mai mare întindere menționăm: [1], [3], [4], [6], [15], [16], [18] [19], [20], [21], [22], [23], [24], [26], [28], [30].

În matematica aplicată în general, și în matematica legată de rezolvarea problemelor pe calculator, cercetătorul, chiar presupunînd că are la dispoziție informația științifică de ultimă oră — ceea ce nu este cazul în acest

*) Lucrare prezentată la al IX-lea Simpozion internațional de Programare matematică, Budapesta, 23—27 august, 1976.

domeniu —, nu este scutit de necesitatea de a căpăta experiență prin teste numerice pe calculator. Aceasta, deoarece varietatea problemelor neliniare, fiind foarte largă, (sîntem încă departe de situația de a afirma că putem rezolva „automat" orice problemă), rezolvarea efectivă a unei probleme depinde de tehnica de calcul, de programele de calcul și încă în cea mai mare măsură de factorul om.

Autorul acestei lucrări a fost pus în fața acestei probleme, în mod direct, atunci cînd a fost solicitat să rezolve unele teme de optimizare neliniară necesare realizării unor contracte de cercetare științifică.

Una din problemele cercetate, a cărei importanță a fost subliniată și de Ph. Wolfe [18], a fost aceea a unui studiu comparativ, sistematic și unitar, al comportării unora din cei mai importanți algoritmi cunoscuți din punct de vedere al eficienței în rezolvarea problemelor. Alegerea noastră s-a oprit asupra algoritmilor de determinare a punctelor de extremum pentru funcții de n variabile, dat fiind că tehnica optimizării secvențiale (SUMT) îi folosește pentru rezolvarea unei clase largi de probleme de programare matematică neliniară.

Cercetarea noastră cuprinde un număr de 26 algoritmi programați și studiați privind comportamentul lor în rezolvarea a 10 probleme test. Rezultatele sînt prezentate în [9], [10], [11], [12] dar, mai ales în [15].

A. În cursul cercetărilor de eficiență s-au obținut *unele rezultate cu caracter teoretic*; unor algoritmi li s-au adus modificări ori s-au dat proceduri de folosire care, într-un fel sau altul, le-a îmbunătățit comportamentul în rezolvarea problemelor.

Un loc important în cercetarea noastră a fost acordat algoritmilor de optimizare a funcțiilor de n variabile care nu utilizează informația dată de evaluarea gradientului. Există rațiuni suficiente pentru abordarea subiectului. Evaluarea derivatei poate fi costisitoare, pentru om și mașină, din punct de vedere timp. Dar nu numai atît: clasa de cea mai mare complexitate, cu cele mai dificile probleme de programare neliniară, este considerată clasa în care funcțiile ce definesc problema nu sînt ușor de dedus și de cele mai multe ori valorile lor sînt date tabelar, prin simulare sau formule recursive.

În cadrul acestor cercetări o atenție deosebită i s-a acorda talgoritmului simplexelor succesive pentru optimizarea unei funcții neliniare de n variabile, a lui Himsworth-Splendley-Hest, dezvoltat ulterior de Nelder și Mead, pentru care s-au propus diferite modificări cu intenția de a-i mări viteza de convergență sau stabilitatea. Interesul nostru pentru acest algoritm a fost generat, pe de o parte, de proprietățile remarcabile pe care le are mulțimea punctelor ce alcătuiesc un simplex, iar pe de altă parte, de faptul că se crede că algoritmul simplex are mai multe șanse, în clasa sa, de a determina un optim global. S-au propus în total, șase noi variante ale algoritmului inițial [9], [15]. Una dintre variante privește un calcul ponderat al centroidului simplexului, cu ajutorul căruia se determină noua direcție de optimizare, iar o alta creează un algoritm mixt, prin combinarea algoritmului simplex cu algoritmul de optimizare ciclică pe axe, care este un algoritm convergent pentru clasa funcțiilor pseudo-convexe (respectiv pseudo-concave). În plus, algoritmul nou creat reduce efortul de calcul față de algoritmul de optimizare ciclică pe axe și mărește siguranța în obținerea soluției, față de fiecare din algoritmii care îl compun.

Pentru toți algoritmii descriși s-au făcut cercetări privind eficiența lor în rezolvarea unor probleme test cunoscute prin gradul lor de dificultate. Prin numărul mare de teste efectuate, rezultatele numerice prezentate în [9] — [15] aduc o contribuție la rezolvarea problemei de decizie cu care sîntem confruntați, atunci cînd trebuie să alegem algoritmul de rezolvare. Pe măsură ce punctul curent se apropie de punctul de optim, graficele de variație a efortului de calcul pot fi utilizate în vederea stabilirii unei strategii de utilizare combinată a mai multor algoritmi, în vederea obținerii unei eficiențe maxime în rezolvarea problemei.

În același mod au fost studiate metode de gradient în optimizarea fără restricții. Așa cum se știe, în aceste metode punctul de optim se aproximează succesiv prin formula

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k, \tag{1}$$

unde d^k este direcția gradientului sau o direcție legată într-un anume fel de direcția acestuia. O atenție deosebită a fost acordată algoritmilor de direcții conjugate, care au proprietatea de a minimiza o formă pătratică într-un număr finit de iterații și în special forma algoritmilor lui Fletcher-Reeves și Davidon-Fletcher-Powell.

Pentru algoritmul lui Fletcher-Reeves, a fost studiată o formulă a direcției în ipoteza că determinarea optimului unidimensional se face cu eroare mare:

$$d^k = g^k - \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i^k d^i, \quad \text{unde } \gamma_i^k = \frac{(g^k)^T (g^{i+1} - g^i)}{(d^i)^T (g^{i+1} - g^i)}, \tag{2}$$

iar $g^k = \nabla f(x^k)$. Această formulă, valabilă pentru problema de maxim, se prezintă ca o generalizare a formulei determinării direcției în algoritmul Fletcher-Reeves sau Fletcher-Reeves modificat. Ideea determinării lui d^k ca o combinație a tuturor direcțiilor precedente o găsim la Beckman [2]. Presupunînd că optimizarea pe direcție se face cu suficientă acurateță, la Beckman toți γ_i^k, $i = 0, \ldots, k-2$ sînt nuli. Încercarea de a introduce o corecție cu mai mulți termeni, la erori mari de aproximare a optimului unidimensional, ne-a fost sugerată de constatarea că cel mai mare efort de calcul se consumă pentru determinarea acestui optim. Rezultatele testelor de eficiență efectuate de autor pînă în prezent sînt însă neconcludente. Testele numerice cu o formulă cu doi termeni:

$$d^k = g^k - \frac{g^k(g^k - g^{k-1})}{d^{k-1}(g^k - g^{k-1})} d^{k-1} - \frac{g^k(g^{k-1} - g^{k-2})}{d^{k-2}(g^{k-1} - g^{k-2})} d^{k-2} \tag{3}$$

arată, în unele cazuri, o eficiență sporită față de formula cu un singur termen. În cele mai multe cazuri însă, rezultatele sînt nefavorabile. Este ca și cum eroarea introdusă de faptul că funcția nu este o formă pătratică se transmite mai puternic printr-o formulă cu mai mulți termeni și este dominantă erorii introdusă de o insuficientă optimizare pe direcție.

În ceea ce privește algoritmul lui Davidon-Fletcher-Powell, în [14] se descrie o procedură de utilizare a algoritmului pentru rezolvarea unei probleme de maxim local al unei funcții de clasa C^2, atunci cînd subrutina de optimizare unidimensională furnizează maximum pe direcție.

Algoritmul lui Davidon-Fletcher-Powell, așa cum este descris în [5] și [17], ca în toate celelalte referiri cunoscute de autor, încearcă să găsească un minim local al unei funcții $f(x) \in C^2$, $x \in R^n$, printr-o serie de aproximații de tip Newton, date de procesul iterativ (1) în care

$$d^k = - H_k^{-1} \nabla f(x^k) \tag{4}$$

unde matricea H_k^{-1}, al cărui calcul în fiecare punct x^k ar fi dificil din multe considerente, aproximează pe $H^{-1}(x^k)$ numai cu ajutorul derivatelor de ordinul întîi, prin

$$H_k^{-1} = H_{k-1}^{-1} - \frac{H_{k-1}^{-1} v_k v_k^T H_{k-1}^{-1}}{v_k^T H_{k-1}^{-1} v_k} + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T v_k} \tag{5}$$

unde

$$s_k = x^k - x^{k-1} \tag{6}$$

$$v_k = \nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1}), \tag{7}$$

iar λ_k furnizează minimumul pe direcția d^k, adică

$$f(x^k + \lambda_k d^k) = \min_{\lambda > 0} f(x^k + \lambda d^k). \tag{8}$$

Drept H_0^{-1} se poate lua matricea unitate, sau orice altă aproximație simetrică și pozitiv definită. Se arată în acest caz [17] că H_k^{-1} rămîne pozitiv definită, condiție esențială pentru stabilitatea procesului.

Programele noastre de calcul au utilizat

$$H_0^{-1} = I. \tag{9}$$

Dacă avem de rezolvat o problemă de maxim a lui $f(x)$, evident, vom minimiza $-f(x)$. Există, însă, situații în care, din punct de vedere practic, lucrurile nu sînt așa de simple. Este posibil, de exemplu, ca subrutina care realizează optimizarea unidimensională (8) să fie programată numai pentru maxim și deci transformarea ei pentru a rezolva probleme de minim să necesite intervenții. Acestea fie că sînt complicate — chiar imposibile dacă ea există numai ca program obiect — fie că nu le dorim, pentru că întregul nostru sistem de programe de optimizare este construit pentru maxim. Se pune problema cum trebuie utilizat algoritmul lui D-F-P pentru ca el să rezolve o problemă de maxim în aceste condiții.

S-ar părea, și astfel a lucrat pînă în prezent și autorul, că singurul lucru de modificat este direcția d^k, așa încît (4) să devină

$$d^k = H_k^{-1} \nabla f(x^k), \tag{4'}$$

iar λ_k să determine maximul pe direcția d^k:

$$f(x^k + \lambda_k d^k) = \max_{\lambda > 0} f(x^k + \lambda d^k) \tag{8'}$$

formulele (1), (5), (6), (7), rămînînd neschimbate, căci, dacă d^k, calculat cu (4) este o direcție bună pentru minim, atunci $-d^k$ trebuie să fie o direcție bună pentru maxim.

Raționamentul este corect atît timp cît H_k^{-1} ar rămîne în aceste condiții pozitiv definită, căci numai în acest caz avem

$$(d^k)^T \nabla f(x^k) = \nabla^T f(x^k)\ H_k^{-1}\ \nabla f(x^k) > 0. \tag{10}$$

Testele experimentale arată că plecînd de la $H_k^{-1} = I$, H_k^{-1} devine negativ definită chiar la a n-a iterație într-un proces de maximizare. O dată ce H_k^{-1} a devenit o matrice negativ definită, lui λ_k trebuie să i se permită să devină negativ și în orice caz o încercare de localizare a optimului pe direcția d^k cu un pas pozitiv va reprezenta o nereușită, care va mări inutil numărul de evaluări ale funcției.

Aceasta ne-a dus la concluzia că, în problema de maxim în care subrutina de optimizare furnizează de asemenea maximul pe direcție, este mai eficient ca aproximația inversei matricei hessian să se construiască prin aceeași formulă (5), ca o matrice negativ definită, în loc să se folosească direcția cu semn schimbat, dată de algoritmul pentru minim. Pentru a asigura stabilitatea procedurii, se demonstrează că dacă H_k^{-1} este negativ definită, atunci H_{k+1}^{-1} rămîne negativ definită.

Demonstrația urmează aceeași schemă ca și în cazul în care H_k^{-1} rămîne pozitiv definită, cînd se utilizează algoritmul pentru minim. Procedura propusă este stabilă și calculează valoarea funcției de un număr mai mic de ori decît în cazul în care direcția de maximizare unidimensională ar fi direcția, luată cu semn schimbat, determinată de algoritmul pentru minim.

Așa cum se cunoaște, algoritmul lui Davidon-Fletcher-Powell este un algoritm deosebit de eficient. El are însă dezavantajul că pentru determinarea aproximației inversei matricei hessian (5) este necesară o memorie mare care poate fi prohibitivă pentru problemele mari. Desigur, aproximația se poate construi, la fiecare iterație, în memoria externă. Această procedură ar fi însă, extrem de lentă și timpul cîștigat prin foarte buna viteză de convergență a algoritmului ar fi cu mult depășit de viteza de lucru redusă a procedurii, determinată de transferul la fiecare iterație, a unei mari cantități de informație din memoria internă în memoria externă În asemenea situații, propunem în [12] utilizarea unei proceduri mixte prin combinarea unui algoritm vectorial — cu care se lucrează în memoria internă pînă la crearea unei aproximații a inversei matricei hessian pe un suport de memorie externă —, cu un algoritm matriceal, de tip Newton-Raphson de exemplu; optimizarea pe direcția de tip Newton se face după un anumit număr de iterații, în general n. În vederea obținerii acestui rezultat, s-au propus și s-au studiat trei noi algoritmi micști, pe care i-am denumit: algoritmul gradient-hessian (sau Cauchy-Newton), algoritmul Fletcher-Reeves-Newton I [11] și algoritmul Fletcher-Reeves-Newton II [13].

În algoritmul Cauchy-Newton se fac n iterații pe direcția gradientului, în care timp se determină o aproximație a inversei matricei hessian, ca o aplicație a formulei lui Sherman-Morrison [27] de determinare recursivă a inversei unei matrice, după care se face o optimizare pe direcția Newton dată de formula (4). Algoritmul Fletcher-Reeves-Newton I are aceiași pași ca și algoritmul Cauchy-Newton, cu deosebirea că, în loc de optimizări pe direcția gradientului, se fac optimizări pe direcții Fletcher-Reeves. Studiul acestor algoritmi ne-a permis să tragem concluzia că o astfel de procedură este eficientă în sensul ratei de convergență, cu toate că aceasta rămîne mai mică decît a algoritmului

lui Davidon-Fletcher-Powell. După ce am stabilit acest lucru, trebuie să elaborăm un algoritm care să poată memora elementele necesare calculului aproximației inversei în memoria externă cu un transfer de informație cît mai mic, deoarece primii doi algoritmi, folosind ca și algoritmul lui Davidon-Fletcher-Powell, o formulă recursivă pentru aproximația inversei, necesită, așa cum am menționat, transfer mare de informație la fiecare iterație. Acest lucru îl realizează algoritmul Fletcher-Reeves-Newton II, în care primele n iterații se fac după n direcții mutual conjugate, de exemplu, direcții Fletcher-Reeves, iar aproximația inversei se poate construi numai cu ajutorul matricei D_N, ai cărei vectori-coloană sînt vectorii mutual conjugați d^k, pe care s-au făcut cele n optimizări, normalizați prin factorul

$$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{|-d^k g^k / \lambda_k|}}. \tag{11}$$

Construcția matricei D_N nu necesită la fiecare iterație decît transferul vectorului d^k normalizat.

În [13] se arată că aproximația inversei matricei hessian a unei funcții de clasă C^2 este $H_n^{-1} = D_N D_N^T$ și că dacă funcția ce se optimizează este o formă pătratică $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + bx$, atunci $H_n^{-1} = A^{-1}$. Evident, procedura poate fi utilizată chiar și numai pentru determinarea inversei unei matrice simetrice și definite A, în condițiile în care punctul inițial se prezintă astfel încît să permită crearea celor n direcții mutual conjugate. În acest caz, se minimizează $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x$. Dacă A este nesingulară, dar nesimetrică, și nici nu cunoaștem, așa cum se întîmplă în practică, că este definită, atunci se minimizează $f(x) = \frac{1}{2} x^T A^T A x$ și $A^{-1} = DD^T A^T$; mai mult, procedura poate fi utilizată la determinarea inversei generalizate A^+ a unei matrice A de tip $(m \times n)$, $m > n$, rang $A = n$ în care caz $A^+ = DD^T A^T$. Calculul inversei generalizate este o problemă curentă în aplicații, ea fiind echivalentă cu problema minimizării abaterilor prin metoda celor mai mici pătrate.

Din modul de construcție al algoritmului se vede că în locul algoritmului lui Fletcher-Reeves poate fi utilizat, în cele n iterații de construire a inversei, orice algoritm de direcții conjugate, așa încît, această procedură definește o clasă de algoritmi micști.

Așa cum se știe, majoritatea algoritmilor de programare neliniară generează un șir de puncte convergente, într-un număr infinit de pași, către punctul de optim. Deducerea unor criterii de evaluare a erorii în momentul opririi procesului de calcul este o problemă de cea mai mare importanță, în rezolvarea problemelor neliniare. În [15] se deduc unele rezultate relativ la natura punctelor și valorilor de extremum a perechii de forme pătratice:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x \qquad \text{și} \qquad f_2(x) = \frac{1}{2} x^T A^{-1} x + b^T x.$$

Astfel se demonstrează propozițiile:

1) Dacă una din forme, fie ea $f_1(x)$ admite un punct de extremum x_1^*, atunci și cealaltă formă pătratică, $f_2(x)$, admite un punct de extremum x_2^* de aceeași natură și avem $x_2^* = A^2 x_1^*$.

2) Valorile $f_1(x_1^*)$ și $f_2(x_2^*)$ sînt strict pozitive dacă x_1^* este punct de maxim și strict negative dacă x_1^* este punct de minim.

Tot aici se arată că avem inegalitățile:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1} b^T b \leqslant f_1(x_1^*) \leqslant -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_n} b^T b \tag{12}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_n b^T b \leqslant f_2(x_2^*) \leqslant -\frac{1}{2}\lambda_1 b^T b \tag{13}$$

unde λ_1 este cea mai mică și λ_n cea mai mare valoare proprie a matricei definite A.

Formulele de mai sus nu rezolvă practic însă, problema. Calculul valorilor proprii este el însuși o problemă dificilă și dacă valorile proprii λ_1 și λ_n sînt foarte diferite, intervalul dat de formulele de mai sus este mare.

În continuare se dau inegalitățile satisfăcute de valorile formelor pătratice menționate în punctele de extremum, care nu mai depind de cunoașterea lui λ_1 și λ_n, ci numai de intervalul în care se situează valorile proprii ale lui A:

Dacă $-\infty < \lambda_i < -1$ sau $0 < \lambda_i < 1$, atunci

$$f_1(x_1^*) < f_2(x_2^*) = -\frac{1}{2} b^T A b. \tag{14}$$

Dacă $-1 < \lambda_i < 0$ sau $\lambda_i > 1$, atunci

$$f_1(x_1^*) > f_2(x_2^*) = -\frac{1}{2} b^T A b. \tag{15}$$

Formulele de mai sus pot fi utile în cazurile în care determinarea condiției de aplicabilitate poate fi obținută cu ajutorul teoremei cunoscute: Orice valoare proprie λ_j unei matrice pătratice A nu depășește, în modul, nici una din normele sale canonice.

În ceea ce privește metoda rezolvării unor probleme de programare neliniară de dimensiuni mari, cu structură specială, cu ajutorul programării liniare-parametrice, o considerăm de o mare importanță, dată fiind eficiența codurilor de programare liniară. De asemenea, considerăm că este posibilă crearea unor sisteme de calcul pe această bază. Menționăm, în această privință, un rezultat obținut în colaborare cu V. Ionescu [8] și cu care au început cercetările noastre de programare neliniară. Acesta se referă la rezolvarea cu ajutorul programării liniare parametrice a următoarei clase de probleme neliniare:

$$max\ x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j(y) x_j \tag{16}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}(y)x_j = b_i(y), \quad i = 1, ..., m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, ..., n \tag{17}$$

$$y \geqslant 0$$

unde $c_j(y)$, $a_{ij}(y)$ și $b_i(y)$ sînt polinoame de un grad oarecare în y.

În [25] se dă un algoritm pentru rezolvarea problemei de mai sus în care doi vectori ai matricei și termenul liber sînt polinoame de gradul I în y. În [7] se tratează problema de programare parametrică în cazul în care $c_j(y)$ sînt polinoame de gradul II, iar a_{ij} și b_i — constante. Noi am considerat cazul în care unul din vectorii coloană ai coeficienților matricei ecuațiilor de restricții, cît și de asemenea vectorul termenilor liberi, au componentele polinoame de gradul II.

B. *Rezultatele studiului de eficiență* asupra algoritmilor studiați sînt prezentate în extenso în [9], [10], [11], [12] și [15].

Cercetările de eficiență au avut ca prim scop studiul comportamentului diferiților algoritmi în determinarea optimului unor funcții cu diferite grade de neliniaritate, urmărindu-se determinarea capacității algoritmului de a rezolva probleme atunci cînd procesul iterativ se desfășoară într-o regiune în care funcția prezintă o vale adîncă, hessianul devine singular, funcția este pătratică cu un spectru larg al valorilor proprii etc. S-a urmărit, în general, capacitatea algoritmului de a rezolva problema cu o anume acuratețe și cu o limitare de timp pentru mașină. Pentru a face posibilă compararea rezultatelor diferiților cercetători — timpul de calcul depinzînd de performanțele calculatorului folosit—, presupunem că timpul de calcul este proporțional cu numărul $NE = NF + n \cdot NG$, unde NF este numărul de evaluări ale funcției, NG ale gradientului și n numărul de variabile. Acceptînd această formulă, trebuie să acceptăm și obiecția pe care cineva poate să o ridice, remarcînd că timpul de calcul depinde și de numărul de operații logice strict necesare algoritmului. Răspunsul este dat de faptul că timpul de calcul este dominant pentru problemele de dimensiuni mari.

Din punctul de vedere al unor concluzii generale, credem că experiența noastră scoate în evidență mai multe aspecte:

a) Cercetarea eficienței trebuie să se facă metodologic pe tot parcursul procesului de optimizare. Rezultatele pe care le prezentăm în [15], unde NE a fost determinat pentru $d = \| x^k - x^* \| < \varepsilon$, ($\varepsilon = 1, ..., 10^{-6}$), dau o altă imagine asupra comportării algoritmilor decît cele pe care le-am dat în [11], unde efortul de calcul a fost evaluat numai la sfîrșitul procesului de optimizare.

b) Eficiența procedurii depinde, cel puțin în apropierea punctului de optim, de eroarea de rotunjire introdusă de calculator. Dacă urmărim obținerea unor rezultate de mare precizie, atunci calculul în dublă precizie este absolut obligatoriu. Pentru a da un singur exemplu este suficient să menționăm rezultatele obținute cu algoritmul lui Fletcher-Reeves pentru problema lui Rosenbrock: în simplă precizie, cu un număr echivalent de evaluări de funcție $NE = 412$, algoritmul ajunge la o distanță de optim egală cu $d = 0.15 \times 10^{-4}$ după care precizia nu mai poate fi îmbunătățită. Pentru $NE = 3093$, distanța $d = 0.12 \times 10^{-4}$ și punctele obținute oscilează în jurul punctului la care se

ajunsese pentru $NE = 412$. În dublă precizie, pentru $NE = 254$ distanța este de $d = 0.33 \times 10^{-4}$ și procesul se încheie după satisfacerea criteriului de stop $\| g^k \| < 10^{-6}$, cu $d = 0.62 \times 10^{-7}$ pentru $NE = 294$. Acest aspect al problemei iese puternic în evidență prin compararea graficelor de evaluare a eficienței în simplă și dublă precizie. În simplă precizie curba de evaluare a eficienței tinde, sub o anume valoare a acurateței, să devină paralelă cu abscisa, pe care este măsurat efortul de calcul. Menționăm că testele au fost efectuate pe calculatoarele IBM/360 și IBM/370 la care lungimea cuvîntului este de 32 biți.

c) Eficiența procedurii este, de asemenea, puternic influențată de strategia determinării lungimii pasului de căutare a optimului pe direcție, în subrutina de optimizare unidimensională. În general cele mai bune rezultate le-am obținut atunci cînd, la începutul procesului de optimizare pasul de intrare, constant, era normalizat prin împărțirea la $\| d^k \|$. Cînd punctul curent ajungea în apropierea punctului de optim, pasul de intrare se lua egal cu o fracțiune a lungimii totale a pasului realizat la iterația precedentă sau ca o medie a lungimilor totale a pașilor pentru ultimele n optimizări unidimensionale.

d) Eficiența este de asemenea strîns legată de alegerea punctului inițial.

În ceea ce privește eficiența algoritmilor în fiecare din clasele studiate, din analiza rezultatelor obținute în rezolvarea problemelor test considerate, credem că putem sintetiza următoarele:

i) *În clasa algoritmilor ce nu utilizează gradientul*, cele mai eficiente rezultate s-au obținut cu algoritmul lui Davies, Swann și Campey (DSC) și cu algoritmul lui Powell. Ei au, în general, cea mai rapidă viteză de convergență, chiar și în apropierea punctului de optim. Sînt însă și excepții: algoritmul lui Powell pentru funcția Fiacco și McCormic [1] indică ca punct optimal punctul staționar dar neoptimal $x = (0,0)$, fapt curios deoarece metoda nu este o metodă de gradient. Algoritmul converge, de asemenea, relativ încet pentru funcțiile lui Wood [2] și Powell [3].

Un comportament, de asemenea, foarte bun îl are algoritmul lui Hooke și Jeeves, care consumă însă, un mare număr de evaluări de funcție pentru satisfacerea criteriului de stop. Următorul loc, îl ocupă algoritmul lui Rosenbrock.

Eficiența algoritmului de optimizare ciclică este în general mică. Sînt și aici excepții: problema cubică a lui Witte și Holst [4] și problema pătratică cu zece variabile [5]. În acest din urmă caz, lucrurile se explică prin faptul că hiperelipsoidul are centrul în origine și axele pe direcția axelor de coordonate, și evident, pentru o astfel de problemă, algoritmul se va comporta bine. Optimizarea pe diagonală îi mărește viteza de convergență.

---

[1] $f(x) = (x_1^4 - 3)^2 + x_2^4$

[2] $f(x) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1-x_1)^2 + 90(x_3^2-x_4)^2 + (1-x_3)^2 + 10{,}1[(x_2-1)^2+(x_4-1)^2] + 19{,}8(x_2-1)(x_4-1)$.

[3] $f(x) = (x_1-10x_2)^2 + 5(x_3-x_4)^2 + (x_2-2x_3)^4 + 10(x_1-x_4)^2$.

[4] $f(x) = 100(x_2-x_1^3)^2 + (1-x_1)^2$.

[5] $f(x) = \sum_{k=1}^{10}(110-10k)x_k^2$ sau $f(x) = \sum_{k=1}^{10}(110-10k)^2x_k^2$.

Cu excepția funcțiilor lui Rosenbrock [1] și Beale [2], algoritmul simplex a lui Nelder și Mead are — așa după cum reiese din experiența noastră —, o viteză de convergență mică, în nici un caz comparabilă cu a algoritmului lui Powell, după cum se afirmă în literatură.

Convergența însă, este puternic dependentă de configurația și mărimea simplexului inițial. Algoritmul are dezavantajul că simplexul poate degenera, în care caz iterațiile se opresc într-un punct departe de optim. În ceea ce privește siguranța în rezolvarea problemei, menționăm că am obținut rezultate mai bune, atunci cînd inițial, sau din m în m iterații, simplexul era extins cu ajutorul unei subrutine de optimizare unidimensională (Simplexul maximal). În acest caz, numărul de evaluări ale funcției a fost însă foarte mare.

Simplexul cu centroid ponderat, după formula dată în [9] se comportă mai bine în toate cazurile, în afară de funcția lui Fiacco și McCormic, iar în cazul în care se utilizează și subrutina de optimizare unidimensională, rezultatele sînt și mai bune, dar nu și pentru funcția lui Rosenbrock. Dezavantajul ponderării apare evident în cazul în care vîrfurile simplexului se așează pe o suprafață de nivel.

Conform rezultatelor obținute pe testele efectuate, combinarea algoritmului simplex cu algoritmul ciclic, în algoritmul mixt simplex—cyco este favorabilă, cel puțin din punctul de vedere al siguranței în rezolvarea problemei și a acurateței. Numărul de evaluări ale funcției este relativ mare, în special din cauza algoritmului ciclic.

ii) *În clasa algoritmilor care utilizează informația dată de gradient* am efectuat studii de eficiență pentru: algoritmul lui Cauchy, gradientul subrelaxat, algoritmul mixt gradient-diagonală, algoritmul Fletcher-Reeves, Fletcher Reeves modificat, algoritmul tangentelor paralele (PARTAN), algoritmul Davidon-Fletcher-Powell, algoritmul mixt Cauchy-Newton și Fletcher-Reeves-Newton II.

Rezultatele obținute sînt date în tabelele și graficele din [11], [13] și [15] în două variante: una utilizează subrutina STEP, care caută optimul pe direcție prin interpolări succesive cu o formă pătratică, fără folosirea derivatelor, și cu subrutina STEPG care interpolează cu o cubică și utilizează gradientul.

Rezultatele noastre numerice confirmă, pe un număr mare de teste efectuate unitar, rezultatele obținute numeric și de alți cercetători. Algoritmii de direcții conjugate sînt algoritmi care, și în cazul funcțiilor nepătratice, au un comportament mai eficient în rezolvarea problemelor, iar printre aceștia, un loc deosebit îl ocupă algoritmul lui Davidon-Fletcher-Powell și algoritmul lui Fletcher-Reeves.

În ceea ce privește algoritmii studiați în această clasă, din cercetarea noastră rezultă următoarele:

Algoritmul lui Cauchy este un algoritm cu viteză de convergență foarte mică, a cărui utilizare este cu atît mai ineficientă cu cît precizia necesară sau numărul de variabile este mai mare. Utilizarea lui subrelaxată este evident

---

[1] $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$.

[2] $f(x) = \sum_{i=1}^{8} \{c_i - x_1(1 - x_2^i)\}^2$, $c_1 = 1{,}5$, $c_2 = 2{,}25$, $c_3 = 2{,}625$.

avantajoasă, reducînd aproximativ la jumătate, efortul de calcul, mai ales în prima parte a procesului de optimizare.

Combinarea algoritmului lui Cauchy cu o optimizare „pe diagonală" în algoritmul pe care l-am denumit „gradient-diagonală" are un efect spectaculos din punctul de vedere al eficienței. Regăsim pentru funcția lui Rosenbrock, pentru problema lui Witte și Holst sau a lui Fiacco o mărire a vitezei de convergență de aproximativ 20 de ori, așa cum se menționează în [29]. Pentru problema lui Wood sau Powell viteza crește însă numai de cîteva ori. Pe aceste exemple, algoritmul de gradient-diagonală este comparabil cu algoritmul lui Fletcher-Reeves, adică are o viteză de convergență în clasa algoritmilor de direcții conjugate. Tot în [29] se menționează că experiența existentă la acea dată indică drept cea mai bună strategie pentru mișcarea pe diagonală, efectuarea ei după ce s-au făcut șapte optimizări pe direcția gradientului. Însă era natural să gîndim că strategia optimă ar depinde mai curînd de numărul de variabile decît de cel al optimizărilor. În consecință, pentru fiecare problemă, am efectuat teste cu mișcarea pe diagonală după $m = n + 1$, $m = n + 3$, $m = n + 5$ optimizări pe direcția gradientului. Rezultatele testelor arată că ideea legării mișcării pe diagonală de numărul de variabile este viabilă și că cea mai bună strategie ar fi aceea ca optimizarea pe diagonală să se facă după $n + 1$ optimizări pe direcția gradientului, unde n reprezintă numărul de variabile.

Sugerăm continuarea cercetărilor experimentale asupra algoritmului gradient-diagonală cu o formulă de determinare a direcției dată de $d^k = x^k - x^{k-n}$: $k \equiv 0 \pmod{n}, k = \pi 1, \pi 2, \ldots$ adică un algoritm analog cu algoritmul cu optimizare pe diagonală.

Comparînd algoritmul lui Fletcher-Reeves și varianta sa modificată [1], testele arată o ușoară superioritate a variantei modificate, pentru problemele lui Fiacco, Beale, Box și Powell. Pentru funcția lui Rosenbrock cu subrutina STEPG se obțin aceleași rezultate, iar cu subrutina STEP se obțin rezultate mai bune cu varianta modificată. Funcția cubică a lui Witte și Holst ne arată o situație neconcludentă. În ceea ce privește problema lui Wood, algoritmul lui Fletcher-Reeves modificat, ca de altfel și algoritmul lui Davidon-Fletcher-Powell, ajunge pe parcursul procesului de optimizare în punctul cunoscut cu hessian singular, din regiunea căruia iese doar cu un mare efort de calcul. În afară de această situație și de rezultatele obținute cu subrutina STEPG pentru funcția cubică a lui Witte și Holst, algoritmul lui Davidon-Fletcher-Powell este cel mai eficient algoritm testat de noi.

Algoritmul tangentelor paralele (PARTAN) este cel mai puțin eficient în clasa algoritmilor de direcții conjugate studiați. Algoritmul mixt Cauchy-Newton (gradient hessian) îi este superior, deși mai puțin eficient decît algoritmul Fletcher-Reeves.

Algoritmul mixt Fletcher-Reeves-Newton II a fost testat atît în vederea cercetării eficienței cît și pentru verificarea capacității de a determina inversa cu o bună precizie. În ceea ce privește eficiența metodei, s-ar părea că, în cazul în care optimizarea pe direcția de tip Newton, $d^{n+1} = -H_n^{-1} \cdot g^{n+1}$ se face la începutul procesului, și sîntem departe de

[1] $d^k = -g^k + \dfrac{g^k g^k - g^k g^{k-1}}{d^{k-1} g^{k-1}} \cdot$

punctul de optim, această direcție este mai puțin bună decît a $n + 1$ direcția Fletcher-Reeves și, în consecință, algoritmul apare, cel puțin în această parte a procesului, mai puțin eficient decît algoritmul lui Fletcher-Reeves.

Pentru a îmbunătăți eficiența, am efectuat teste în care mișcarea pe direcția de tip Newton se face numai dacă punctul curent este suficient de aproape de punctul optim, de exemplu dacă $\|g^k\| < 1$, în care caz algoritmul se arată a fi mai eficient decît algoritmul lui Fletcher-Reeves; convergența în apropierea punctului de optim fiind în unele cazuri chiar mai rapidă decît pentru Davidon-Fletcher-Powell. Luată în totalitate, chiar și această strategie este însă o idee mai puțin eficientă decît procedura Davidon-Fletcher-Powell.

Capacitatea algoritmului de a furniza, pentru funcția nepătratică, inversă matricei hessian în vecinătatea punctului de optim, a fost testată pentru toate problemele test și în toate cazurile am obținut matrice foarte apropiate de cele obținute cu ajutorul algoritmului lui Davidon-Fletcher-Powell. Pentru exemplificare, în tabelul din anexă, prezentăm aproximarea obținută pentru inversa matricei hessian, prin cele două metode, în cazul problemelor lui Rosenbrock, Witte și Holst, Beale și Wood. Algoritmul a fost testat de asemenea, pentru capacitatea de a furniza inversa unei matrice pozitiv definite cu un spectru larg al valorilor proprii. În toate cazurile, după n iterații în dublă precizie, s-a obținut inversa cu o eroare, pentru fiecare element, mai mică de 10^{-5}.

iii) Studiind *comportarea procesului de optimizare* pe diferite porțiuni ale acestuia, a apărut ideea utilizării combinate a algoritmilor. Față de algoritmul mixt, care compune continuu mai mulți algoritmi, algoritmul combinat utilizează distinct, în diferite perioade ale procesului, acei algoritmi care au cea mai bună viteză de convergență. Testele efectuate nu ne permit încă definirea unor asemenea strategii.

iiii) În ceea ce privește *cercetarea eficienței algoritmilor* în rezolvarea problemelor cu restricții au fost studiați comparativ algoritmii lui Powell, Fletcher-Reeves, Davidon-Fletcher-Powell, Rosen și metoda complex a lui Box; primii trei algoritmi sînt utilizați pentru rezolvarea unei probleme cu restricții, în cadrul metodei SUMT.

Din rezultatele privind testele asupra problemelor cu restricții se desprinde o concluzie a cărei veridicitate putea fi presupusă aprioric: cei mai eficienți algoritmi de optimizare fără restricții sînt și cei mai eficienți în rezolvarea unei probleme prin tehnica SUMT, și un algoritm specializat este mai eficient decît un algoritm general.

C) În cursul acestei cercetări au fost scrise, testate și cercetate, în colaborare cu Florica Luban, Sigrid Moga și Radu Șerban, membri ai Laboratorului de cercetări operaționale de la Catedra de cibernetică a Academiei de studii economice, din punct de vedere al capacității de rezolvare a diferitelor clase de probleme, următoarele programe și subrutine [15]:

P. 1 — Programul principal pentru apelarea subrutinelor SIMIXC, POWELL CYCO și HOOKJV.

P. 2 — Programul principal pentru apelarea subrutinelor RSBR și RSBWS.

P. 3 — Programul pentru apelarea subrutinelor SMPX și SMPXW.

P. 4 — Programul principal pentru apelarea subrutinelor de optimizare fără restricții, care utilizează gradientul.

P. 5 — Programul pentru rezolvarea problemelor cu restricții prin metoda COMPLEX a lui Box (în colaborare cu Sigrid Moga și M. Falk).

P. 6 — Programul Rosen pentru rezolvarea problemelor convexe cu restricții liniare (în colaborare cu Radu Serban).

S. 1 — Subrutina STEP de optimizare unidimensională.

S. 2 — Subrutina STEPG de optimizare unidimensională.

S. 3 — Subrutina CYCO (în colaborare cu Florica Luban) programează Algoritmul de optimizare ciclică pe axe și eventual pe diagonală.

S. 4 — Subrutina HOOKJV (în colaborare cu Radu Serban) programează Algoritmul lui Hooke și Jeeves.

S. 5 — Subrutina POWELL (în colaborare cu Florica Luban) programează Algoritmul lui Powell.

S. 6 — Subrutina SIMIXC (în colaborare cu Florica Luban) programează Algoritmul mixt simplex cu optimizare ciclică pe axele de coordonate.

S. 7 — Subrutina RSBR (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul lui Rosenbrock.

S. 8 — Subrutina RSBRWS (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul lui Davies, Swann și Campey.

S. 9 — Subrutina SMPX (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul simplexelor succesive cu sau fără centroid ponderat.

S. 10 — Subrutina SMPXWS (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul simplexelor succesive cu optimizare unidimensională, cu sau fără centroid ponderat.

S. 11 — Subrutina CAUCHY (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul lui Cauchy.

S. 12 — Subrutina GRDSR (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul gradientului subrelaxat.

S. 13 — Subrutina DIAGL (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul mixt gradient-diagonală.

S. 14 — Subrutina FLRV programează Algoritmul Fletcher-Reeves.

S. 15 — Subrutina FLRVMO programează un algoritm de direcții conjugate în care direcția se calculează după o formulă Fletcher-Reeves modificată.

S. 16 — Subrutina TGPAR (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul tangentelor paralele.

S. 17 — Subrutina DVFLPW (în colaborare cu Sigrid Moga) programează Algoritmul Davidon-Fletcher-Powell.

S. 18 — Subrutina CAUHES (în colaborare cu Florica Luban) programează algoritmul mixt gradient-bessian și Algoritmul Newton-Fletcher-Reeves I.

S. 19 — Subrutina FRNII (în colaborare cu Florica Luban) programează Algoritmul Fletcher-Reeves-Newton II.

S. 20 — Subrutina VEM (în colaborare cu Sigrid Moga) reunește într-o singură subrutină metode ale direcției de optimizare unidimensională, determinată (calculată) prin operații vectoriale.

$min\ f(x) = 100\,(x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2$ (Rosenbrock)

FLETCHER-REEVES-NEWTON ($\mu < 1$)

$k = 31$, $\|g\|^2 = 0{,}72 \times 10^{-15}$
$f = 0{,}36 \times 10^{-18}$; $d = 0{,}4 \times 10^{-10}$
$nf = 68$; $ne = 204$

$$H_k^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}50000 & 0{,}99999 \\ 0{,}99999 & 2{,}0050 \end{pmatrix}$$

DAVIDON-FLETCHER-POWELL

$k = 29$; $\|g\|^2 = 0{,}1 \times 10^{-17}$
$f = 0{,}41 \times 10^{-20}$; $d = 0{,}1 \times 10^{-9}$
$nf = 69$; $ne = 207$

$$H_k^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}50002 & 1{,}0004 \\ 1{,}0004 & 2{,}0058 \end{pmatrix}$$

$k = 30$; $\|g\|^2 = 0$.
$f = 0$; $d = 0$.
$nf = 72$; $ne = 216$

$min\ f(x) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1-x_1)^2$ (Witte & Holst)

FLETCHER-REEVES-NEWTON ($\mu < 1$)

$k = 16$; $\|g\|^2 = 0{,}28 \times 10^{-9}$
$f = 0{,}71 \times 10^{-13}$; $d = 0{,}94 \times 10^{-7}$
$nf = 38$; $ne = 114$

$$H_k^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}50019 & 1{,}5003 \\ 1{,}5003 & 4{,}5050 \end{pmatrix}$$

$k = 17$; $\|g\|^2 = 0{,}11 \times 10^{-15}$
$f = 0{,}21 \times 10^{-17}$; $d = 0{,}45 \times 10^{-8}$
$nf = 41$; $ne = 123$

DAVIDON-FLETCHER-POWELL

$k = 34$; $\|g\|^2 = 0{,}4 \times 10^{-16}$
$f = 0{,}12 \times 10^{-19}$; $d = 0{,}22 \times 10^{-10}$
$nf = 108$; $ne = 324$

$$H_k^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}50000 & 1{,}5000 \\ 1{,}5000 & 4{,}5050 \end{pmatrix}$$

$k = 35$; $\|g\|^2 = 0{,}4 \times 10^{-25}$
$f = 0{,}24 \times 10^{-28}$; $d = 0{,}12 \times 10^{-13}$
$nf = 114$; $ne = 342$

$$min\ f(x) = \sum_{i=1}^{3} [ci - x_1(1 - x_2^i)]^2,\ c_1 = 1{,}5;\ c_2 = 2{,}25;\ c_3 = 2{,}625$$

(Beale)

FLETCHER-REEVES-NEWTON ($\mu < 1$)

$k = 11$; $\|g\|^2 = 0{,}16 \times 10^{-12}$
$f = 0{,}16 \times 10^{-14}$; $d = 0{,}84 \times 10^{-8}$
$nf = 29$; $ne = 87$

$$H_k^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}1222 & 0{,}77439 \\ 0{,}77439 & 0{,}21376 \end{pmatrix}$$

$k = 12$; $\|g\|^2 = 0{,}58 \times 10^{-21}$
$f = 0{,}91 \times 10^{-21}$, $d = 0{,}7 \times 10^{-10}$
$nf = 31$; $ne = 93$

DAVIDON-FLETCHER-POWELL

$k = 9$; $\|g\|^2 = 0{,}16 \times 10^{-20}$
$f = 0{,}18 \times 10^{-22}$; $d = 0{,}2 \times 10^{-11}$
$nf = 27$; $ne = 81$

$$H_k^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}1238 & 0{,}7746 \\ 0{,}7746 & 0{,}2137 \end{pmatrix}$$

$k = 10$; $\|g\|^2 = 0$.
$f = 0$; $d = 0$
$nf = 28$; $ne = 84$

$min\ f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^1 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + 10{,}1\,[(x_2 - x_1)^2 + (x_4 - x_1)^2] + 19{,}8\,(x_2 - x_1)(x_4 - x_1)$ (Wood)

FLETCHER-REEVES-NEWTON ($\mu < 1$)

$k = 29$; $\|g\|^2 = 0{,}27 \times 10^{-13}$
$f = 0{,}23 \times 10^{-16}$; $d = 0{,}47 \times 10^{-8}$
$nf = 65$; $ne = 325$; $H_k^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}1427 & 0{,}2836 & -0{,}1352 & -0{,}2713 \\ & 0{,}5686 & -0{,}2712 & -0{,}5440 \\ & & 0{,}1427 & 0{,}2835 \\ & & & 0{,}5686 \end{pmatrix}$$

$k = 30$; $\|g\|^2 = 0{,}37 \times 10^{-19}$
$f = 0{,}23 \times 10^{-22}$; $d = 0{,}3 \times 10^{-11}$
$nf = 76$; $ne = 380$

DAVIDON-FLETCHER-POWELL

$k = 37$; $\|g\|^2 = 0{,}16 \times 10^{-12}$
$f = 0{,}37 \times 10^{-15}$; $d = 0{,}13 \times 10^{-7}$
$ne = 163$; $ne = 815$; $H_k^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}1427 & 0{,}2837 & -0{,}1353 & -0{,}2714 \\ & 0{,}5688 & -0{,}2713 & -0{,}5442 \\ & & 0{,}1428 & 0{,}2836 \\ & & & 0{,}5689 \end{pmatrix}$$

$k = 38$; $\|g\|^2 = 0{,}4 \times 10^{-17}$
$f = 0{,}59 \times 10^{-20}$; $d = 0{,}4 \times 10^{-10}$
$nf = 165$; $ne = 825$

S. 21 — Subrutina MAM (în colaborare cu Florica Luban) reunește într-o singură subrutină metode ale direcției de optimizare unidimensională determinată în raport cu o anume matrice.

BIBLIOGRAFIE

1. BEALE, E.M.L.: *Mathematical Programming in Practice.* Pitman & Sons, London, 1968.
2. BECKMAN, F.S.: *The Solution of Linear Equations by Conjugate Gradient Method.* Mathematical Methods for Digital Computers. Ralston A., Wilf H. (ed), J.Wiley, New York, 1967.
3. BOX, M.J., DAVIES, D., SWANN, W.H.: *Non-Linear Optimization Techniques.* Monografie. Oliver and Boyd, Edimbourgh, 1969.
4. COLVILLE, A.R.: *A Comparative Study on Non-Linear Programming Codes.* IBM Scientific Center. Technical Report, nr. 320—2949, New York, 1968.
5. DAVIDON, W.C.: *Variable Metric Method for Minimization.* AEC, Research and Development Report, ANL-5990, 1959.
6. DESCHENEAU, J.C.: *Comparative Studies in Non-Linear Mathematical Programming Techniques and Their Application to Optimal Control Problems.* M.Sc.Thesis, Computing Science Department. U. of Alberta, Edmonton, 1973.
7. DRĂGAN, I.: *Asupra unei clase de probleme de programare parametrică.* St. cerc. mat., 17, 3, 1965.
8. DUMITRU V., IONESCU V.: *Une méthode de solution numérique d'une catégorie de problèmes de programmation non-linéaire.* Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, nr. 1, 1966.
9. DUMITRU, V.: *Functions Optimization without Evaluating Derivatives.* Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, partea I în nr. 2, 1973, partea a II-a în nr. 1, 1974.
10. DUMITRU, V., MOGA S.: *Testing the Efficiency of the Sequential Optimizing Technique.* Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, nr. 4, 1973.
11. DUMITRU, V.: *Gradient Method for Unconstrained Optimization.* Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, nr. 4, 1974.
12. DUMITRU, V., ȘERBAN, R.: *Speed Convergence and the Choice of Unidimensional Extremum Point.* Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, nr. 1, 1975.
13. DUMITRU, V.: *Conjugate Directions Method, Hessian Approximation and a New Class of Mixed Type Algorithms for Optimization.* Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, nr. 2, 1975.
14. DUMITRU, V.: *On the Davidon-Fletcher-Powell Algorithm for Maximization.* Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, nr. 3, 1975.
15. DUMITRU, V.: *Programare neliniară: algoritmi, programe, rezultate numerice.* Appendix P în colab. cu Fl. Luban, S. Moga, R. Șerban. Ed. Academiei, București, 1975.
16. FIACCO, A.V., McCORMICK, G.P.: *Nonlinear Programming, Sequential Unconstrained Minimization Techniques.* J. Wiley, New York, 1968.
17. FLETCHER, R., POWELL, M.J.D.: *A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization.* The Com. J., nr. 6, 1963, 163—168.
18. FLETCHER, R., (ed): *Optimization.* Academic Press, New York, 1969.
19. HAUER, J.F., DESCHENEAU, J.C.: *MORPAK-I: a Mathematical Optimization Routines Package for Unconstrained Optimization.* Technical Report TR 73—9. Computing Science Dept., U. of Alberta, iulie 1973.
20. HIMMELBLAU, D.M.: *Applied Nonlinear Programming.* McGraw-Hill, New York, 1972.
21. KOWALIK, J.S., OSBORNE, M.R.: *Methods for Unconstrained Optimization Problems.* American Elsevier, New York, 1968.
22. LASDON, L.S.: *Optimization Theory for Large Systems.* McMillan, New York, 1970.

23. LOOTSMA, F.A.: *Boundary Properties of Penalty Functions for Constrained Minimization.* Philips Res. Repts. Suppl. nr. 3, 1970.
24. LOOTSMA, F.A., (ed): *Numerical Methods for Non-Linear Optimization.* Academic Press, London, 1972.
25. MAURIN, H.: *Paramétrisation générale d'un programme linéaire.* Revue Française de Recherche Opérationnelle, 32, 1969.
26. POLAK, E.: *Computational Methods in Optimization: a Unified Approach.* Academic Press, New York, 1971.
27. SCHERMAN, J., MORRISON, J.: *Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to Changes in a Given Column of a Given Row of the Original Matrix.* Ann. math. stat., 21, 1949.
28. STAHA, R.L., HIMMELBLAU D.M.: *Evaluation of Constrained Nonlinear Programming Techniques.* Mat. uz intern, U. of Texas, Austin, 1973.
29. WOLFE, PH.: *Methods of Nonlinear Programming in Nonlinear Programming.* Abadie, J. (ed), North-Holland, Amsterdam, 1967.
30. ZADEH, L.A., NEUSTADT, L.W., BALAKRISHNAN, A.V. (ed): *Computing Methods in Optimization Problems.* Academic Press, New York, 1969.

13.05.1977

R. STROE
Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

Dinamica omogenizării dezvoltării teritoriale

Lucrarea prezintă aspecte ale dinamicii omogenizării dezvoltării economice în profil teritorial. Sînt utilizate grupări ale județelor după nivelul fondurilor fixe și al numărului de angajați, total și în industrie, după valoarea producției globale industriale (total, per capita și ca pondere în total R.S.R). Sînt analizați o serie de indicatori privind reducerea relativă și absolută a decalajelor între nivelurile de dezvoltare.

Dezvoltarea economică judicioasă în profil teritorial a constituit o preocupare majoră, permanentă, a partidului și statului nostru și reprezintă în prezent una din direcțiile principale subliniate de Programul P.C.R., privind făurirea societății socialiste multilateral dezvoltate și înaintarea spre comunism a țării noastre.

Dezvoltarea impetuoasă, în ritm înalt, a întregii economii naționale și repartizarea teritorială judicioasă a forțelor de producție constituie singurele alternative pentru înfăptuirea unor proporții economice juste între toate județele țării, pentru creșterea generală a nivelului de trai al poporului.

Implementarea rațională pe teritoriu a obiectivelor economice, în vederea apropierii nivelurilor de dezvoltare a unităților și subunităților teritorial-administrative, a căpătat noi valențe după 1965, în anii desăvîrșirii construcției socialismului și trecerii României într-o etapă istorică nouă — făurirea societății socialiste multilateral dezvoltate.

Generalizarea experienței dobîndite în acest domeniu și abordarea realistă a problemei au permis elaborarea, pe baza acestei concepții înaintate, a unor planuri privind amplasarea forțelor de producție. Această concepție a politicii economice a partidului nostru [1], [2] formulată și în planul național unic de dezvoltare economică în sensul îmbunătățirii repartizării forțelor de producție pe teritoriul țării prin folosirea tot mai judicioasă a forței de muncă a populației, are în vedere o mai bună distribuire a veniturilor și ridicarea generală a nivelului de trai al oamenilor muncii, lichidarea rămînerii în urmă a unor zone ale țării și dezvoltarea armonioasă a bazei tehnico-materiale a

socialismului pe întregul teritoriu al patriei — factori esențiali în vederea creării condițiilor pentru mersul înainte al societății noastre spre comunism.

Strategia implementării raționale pe teritoriu a obiectivelor economice, îndeosebi a celor industriale, s-a concretizat în perioada 1965—1975, în intensificarea procesului de omogenizare etapizată a economiei naționale sub raport teritorial, în apropierea treptată a nivelurilor de dezvoltare ale județelor. Cuantificarea acestui proces se referă la [3]:

— valoarea producției materiale pe locuitor și, în cadrul ei, a celei industriale;

— numărul de personal din industrie și în genere din ramurile neagricole la 1000 de locuitori;

— veniturile pe o persoană ocupată;

— apropierea condițiilor de trai ale populației, ridicarea generală a calității vieții, ca o sinteză finalizatoare a tuturor celorlalți factori și parametri.

Principala pîrghie economică de comandă prin care partidul nostru a acționat și acționează în vederea înfăptuirii omogenizării dezvoltării teritoriale o constituie investițiile. Înfăptuirea vastelor programe de investiții, acordarea unor fonduri mereu sporite județelor rămase în urmă au dus la expansiunea forțelor de producție în toate județele țării, la crearea în fiecare județ a unei baze tehnico-productive tot mai puternice, exprimată sintetic în dotarea cu fonduri fixe. Dinamica acestei dotări (Tabelele 1, 2 și 3) pune clar în lumină amploarea și ritmul ascendent al acesteia în ultimul deceniu și în special în ultimul cincinal.

Tabelul 1

Structura județelor după volumul fondurilor fixe productive din unitățile socialiste

	1965	1970	1975
sub 5 miliarde lei	14	7	1
între 5 și 10 miliarde lei	18	10	7
între 10 și 20 miliarde lei	6	16	13
peste 20 miliarde lei	2	7	19

Tabelul 2

Structura județelor după volumul fondurilor fixe din industrie

	1965	1970	1975
sub 2 miliarde lei	21	11	2
între 2 și 5 miliarde lei	14	14	8
între 5 și 10 miliarde lei	2	8	15
peste 10 miliarde lei	3	7	15

Tabelul 3

Dinamica fondurilor fixe din industrie (milioane lei) și a structurii acestora (%) pe județe

Nr. crt.	JUDEȚUL	Fondurile fixe din industrie			Structura		
		1965	1970	1975	1965	1970	1975
1	ALBA	2.170	3.053	6.076	1,87	1,40	1,50
2	ARAD	1.834	2.860	4.861	1,58	1,31	1,20
3	ARGEȘ	2.667	10.535	23.492	2,29	4,82	5,79
4	BACĂU	7.749	12.376	17.822	6,67	5,67	4,40
5	BIHOR	1.758	4.454	8.506	1,51	2,04	2,10
6	BISTRIȚA NĂSĂUD	320	500	1.620	0,27	0,23	0,39
7	BOTOȘANI	621	1.089	2.025	0,53	0,50	0,50
8	BRAȘOV	6.912	10.830	20.252	5,95	4,96	5,00
9	BRĂILA	2.061	5.480	9.316	1,77	2,51	2,30
10	BUZĂU	999	3.116	5.671	0,86	1,43	1,40
11	CARAȘ SEVERIN	4.390	5.981	8.911	3,78	2,74	2,20
12	CLUJ	3.415	6.526	11.746	2,94	2,99	2,90
13	CONSTANȚA	2.245	4.715	8.911	1,93	2,16	2,20
14	COVASNA	696	1.085	2.430	0,60	0,50	0,60
15	DÎMBOVIȚA	4.894	5.903	11.746	4,21	2,70	2,90
16	DOLJ	1.717	9.258	12.961	1,48	4,24	3,20
17	GALAȚI	1.970	10.575	21.467	1,69	4,84	5,30
18	GORJ	2.820	4.836	9.721	2,41	2,21	2,40
19	HARGHITA	1.135	1.564	4.050	0,97	0,72	1,00
20	HUNEDOARA	11.404	16.314	23.492	9,82	7,47	5,80
21	IALOMIȚA	554	1.880	4.456	0,47	0,86	1,10
22	IAȘI	1.708	4.481	10.126	1,47	2,05	2,50
23	ILFOV	1.949	3.099	5.671	1,68	1,42	1,40
24	MARAMUREȘ	2.156	3.612	5.671	1,86	1,65	1,40
25	MEHEDINȚI	474	1.661	7.290	0,41	0,76	1,80
26	MUREȘ	3.220	7.703	12.556	2,77	3,53	3,10
27	NEAMȚ	4.969	6.962	13.366	4,28	3,19	3,30
28	OLT	2.323	4.422	10.126	2,00	2,02	2,50
29	PRAHOVA	11.029	14.868	23.492	9,50	6,81	5,80
30	SATU MARE	653	1.209	2.430	0,56	0,55	0,60
31	SĂLAJ	327	659	1.620	0,28	0,30	0,40
32	SIBIU	3.240	5.273	8.911	2,79	2,41	2,20
33	SUCEAVA	1.814	3.472	6.076	1,56	1,59	1,50
34	TELEORMAN	1.138	3.314	7.291	0,98	1,52	1,80
35	TIMIȘ	2.823	4.293	9.316	2,43	1,97	2,30
36	TULCEA	1.106	1.958	5.266	0,95	0,90	1,30
37	VASLUI	479	956	3.240	0,41	0,44	0,80
38	VÎLCEA	1.225	3.548	10.936	1,05	1,62	2,70
39	VRANCEA	579	1.163	2.430	0,50	0,53	0,60
40	MUNICIPIUL BUCUREȘTI	12.682	22.813	39.694	10,92	10,44	9,80
TOTAL R.S.R.:		116.105	218.396	405.040	100,0	100,0	100,0

Notă: Calculul valorii fondurilor fixe s-a făcut pe baza datelor din Anuarul Statistic al R.S.R. 1976, după cum urmează:

$$FFI_{75} = FFP_{75} \times PI_{75}$$
$$FFI^{i}_{75} = FFI_{75} \times PI^{i}_{75}$$

$$FFI^i_{70} = \frac{FFI^i_{75}}{I^i_{75/70}}$$

$$FFI^i_{65} = \frac{FFI^i_{75}}{I^i_{75/65}}$$

unde am notat:

FFI_{75} = fonduri fixe în industrie în anul 1975

FFP_{75} = fonduri fixe productive în economia R.S.R. în 1975

PI_{75} = ponderea fondurilor fixe din industrie în total fonduri fixe productive în anul 1975

FFI^i_{75} = fonduri fixe în industrie în anul 1975 în județul i (i = 1,2, ..., 40).

FFI^i_{70} = idem în anul 1970.

FFI^i_{65} = idem în anul 1965.

PI^i_{75} = ponderea fondurilor fixe din industrie din județul i în total fonduri fixe industriale în anul 1975.

$I^i_{75/70}$ = indicele de dinamică a fondurilor fixe din industrie în județul i în anul 1975 față de anul 1970.

$I^i_{75/65}$ = idem în anul 1975 față de anul 1965.

Din dinamica prezentată se observă pentru perioada 1965—1975 tendința de trecere a marii majorități a județelor de la grupele inferioare către cele superioare: în 32 de județe ale țării valoarea dotării fiecăruia cu fonduri fixe a unităților socialiste era, în 1965, pînă la 10 miliarde lei; în 1970, în 26 de județe valoarea acestei dotări se situa între 5 și 20 miliarde lei, pentru ca în 1975 în 32 de județe dotarea să depășească 10 miliarde lei.

Cît privește industria, această tendință manifestă o accentuare și mai pregnantă, reflectînd atenția și rolul deosebit ce se acordă acestei ramuri a economiei naționale. Astfel, dacă în 1965 în 35 de județe dotarea era sub 5 miliarde lei, în 1975 această dotare depășește 5 miliarde lei în 30 de județe.

O dată cu aceasta crește și indicatorul „număr de personal angajat la 1000 de locuitori" ilustrînd procesul de omogenizare economico-socială și tendința pronunțată de apropiere dintre județe. Dinamica și tendințele ocupării personalului angajat (Tabelele 4, 5 și 6) evidențiază apropierea treptată de nivelul caracteristic pentru țările socialiste dezvoltate: 400 de angajați la 1000 de locuitori [4].

Tabelul 4

Numărul angajaților la 1 000 de locuitori

	1965	1970	1975
sub 150	10	6	1
între 151 și 250	21	20	17
între 251 și 400	8	12	20
peste 400	1	2	2

Tabelul 5

Numărul angajaților în industrie la 1000 de locuitori

	1965	1970	1975
sub 60	16	13	8
între 60 și 100	15	13	9
între 100 și 150	5	10	14
peste 150	4	4	9

Tabelul 6

Dinamica numărului de angajați la 1000 de locuitori, din care în industrie, și ponderea acesteia pe județe

Nr. crt.	JUDEȚUL	Număr de angajați la 1000 locuitori			Număr de angajați în industrie la 1000 locuitori			Ponderea numărului de angajați în industrie în total personal		
		1965	1970	1975	1965	1970	1975	1965	1970	1975
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	ALBA	196	238	289	85	106	140	43,4	44,5	48,4
2	ARAD	242	263	309	99	104	131	40,9	39,5	42,4
3	ARGEȘ	220	261	322	91	106	147	41,4	40,6	45,7
4	BACĂU	216	216	249	96	97	112	44,4	44,9	45,0
5	BIHOR	213	249	286	85	104	131	39,9	41,8	45,8
6	BISTRIȚA NĂSĂUD	119	141	179	31	30	52	26,1	21,3	29,1
7	BOTOȘANI	91	102	133	18	22	38	19,8	21,6	28,6
8	BRAȘOV	399	444	523	231	252	304	57,9	56,8	58,1
9	BRĂILA	250	263	303	82	92	117	32,8	35,0	38,6
10	BUZĂU	122	152	200	29	42	73	23,8	27,6	36,5
11	CARAȘ SEVERIN	284	289	335	135	137	161	47,5	47,4	48,1
12	CLUJ	267	299	342	112	131	158	42,0	43,8	46,2
13	CONSTANȚA	298	357	392	61	72	96	20,5	20,2	24,5
14	COVASNA	185	226	275	74	88	120	40,0	38,9	43,6
15	DÎMBOVIȚA	168	203	287	69	88	144	41,1	43,4	50,2
16	DOLJ	175	204	243	44	64	87	25,1	31,4	35,8
17	GALAȚI	229	267	299	56	83	110	24,5	31,1	36,8
18	GORJ	181	219	280	73	89	107	40,3	40,6	38,2
19	HARGHITA	212	255	312	102	113	160	48,1	44,3	51,3
20	HUNEDOARA	344	332	348	189	175	178	54,9	52,7	51,2
21	IALOMIȚA	197	233	238	18	30	46	9,1	12,9	19,3
22	IAȘI	176	198	232	51	61	86	29,0	30,8	37,1
23	ILFOV	117	152	170	32	38	54	27,4	25,0	31,8
24	MARAMUREȘ	213	224	254	96	100	118	45,1	44,6	46,5
25	MEHEDINȚI	154	197	215	43	56	80	27,9	28,4	37,2
26	MUREȘ	225	246	286	82	105	129	36,4	41,9	45,1
27	NEAMȚ	173	185	234	73	83	113	42,2	44,9	48,3
28	OLT	121	142	202	11	23	70	9,1	16,2	34,7
29	PRAHOVA	295	309	343	148	147	178	50,2	47,6	51,9
30	SATU MARE	165	203	250	69	85	109	41,8	41,9	43,6
31	SĂLAJ	101	128	169	14	29	57	13,9	22,7	33,7

Tabelul 6 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
32	SIBIU	308	331	388	174	189	229	56,5	57,1	59,0
33	SUCEAVA	182	201	224	72	85	99	39,6	42,3	44,2
34	TELEORMAN	115	126	178	12	24	57	10,4	19,1	32,0
35	TIMIŞ	301	319	383	125	132	174	41,5	41,4	45,4
36	TULCEA	200	210	261	49	59	82	24,5	28,1	31,4
37	VASLUI	113	123	161	18	30	51	15,9	24,4	31,7
38	VÎLCEA	145	191	232	37	53	70	25,5	27,8	30,2
39	VRANCEA	148	159	186	36	38	52	24,3	23,9	28,0
40	BUCUREŞTI	487	514	577	205	223	256	42,1	43,4	44,4
	TOTAL R.S.R.	226	252	297	87	99	127	38,5	39,3	42,8

Dinamica prezentată pune în evidenţă trecerea de la clasa „pînă la 250 de angajaţi“ la mia de locuitori (31 de judeţe în 1965) la clasa „între 150 şi 400 de angajaţi“ la mia de locuitori (32 de judeţe în 1970, respectiv 37 în 1975). În acelaşi timp, din datele pe judeţe se remarcă acumulări cantitative esenţiale pentru realizarea, în 1990, în România, a nivelului ţărilor dezvoltate din punct de vedere economic. Astfel, categoria de judeţe cu angajaţi între 300 şi 400 la mia de locuitori a crescut de la 4 în 1965 la 11 în 1975. Este de remarcat, totodată, că în timp ce în 1965 un număr de 8 judeţe aveau sub 130 de angajaţi la mia de locuitori, în 1975 toate judeţele depăşiseră acest nivel.

Analizarea situaţiei industriei prin prisma acestui indicator s-a făcut corelat cu situaţia economiei naţionale în ansamblul ei, ţinînd seama de faptul că în perioada considerată ponderea populaţiei ocupată în industrie a fost în medie de circa 40%. Intervalele de grupare considerate în tabelul 5 au ţinut seama tocmai de acest lucru. Din datele prezentate se constată continuarea tendinţei de deplasare a judeţelor către grupele superioare, marcată, de altfel, de faptul că:

— în 1965 existau 31 de judeţe avînd în industrie sub 100 de angajaţi la mia de locuitori, în timp ce în 1975 un număr de 23 de judeţe au peste 100 de angajaţi la mia de locuitori;

— numărul judeţelor cu peste 100 de angajaţi în industrie la mia de locuitori a crescut între 1965 şi 1975 de peste 2,5 ori;

— în 1965 existau 10 judeţe care aveau sub 40 de angajaţi în industrie la mia de locuitori, nivel care în 1976 a fost depăşit de toate judeţele ţării.

Un indicator important al omogenizării dezvoltării teritoriale, element esenţial al realizării corelaţiei plan-prognoză în profil teritorial, îl constituie volumul producţiei industriale. Analiza acestui indicator se poate realiza pe multiple planuri: în mărime absolută, drept criteriu de clasificare, sub raportul ponderii fiecărui judeţ în total (Tabelul 7), în mărime relativă pentru caracterizarea dinamică, drept indicator „per capita“ (pe locuitor, pe angajat etc.) (Tabelul 8), ca structură pe ramuri etc.

Figura 1 prezintă dinamica grupării judeţelor după volumul producţiei globale industriale [5] din care rezultă deplasarea majorităţii judeţelor din clasa sub 5 miliarde lei (30 în 1965) în clasa 10—25 miliarde lei (28 în 1980).

Tabelul 7

Dinamica producției globale industriale (milioane lei) și a structurii acesteia (%) pe județe

Nr. crt.	JUDEȚUL	Producția globală industrială			Structura		
		1965	1970	1975	1965	1970	1975
1	2	3	4	5	6	7	8
1	ALBA	2.743	4.409	8.106	1,57	1,38	1,38
2	ARAD	4.922	6.951	11.585	2,81	2,18	1,97
3	ARGEȘ	3.860	10.441	21.937	2,20	3,27	3,74
4	BACĂU	6.929	10.659	16.336	3,95	3,34	2,78
5	BIHOR	3.978	7.738	14.036	2,27	2,42	2,39
6	BISTRIȚA NĂSĂUD	651	898	1.808	0,37	0,28	0,31
7	BOTOȘANI	1.139	1.811	3.388	0,65	0,57	0,58
8	BRAȘOV	11.123	21.838	38.295	6,35	6,84	6,52
9	BRĂILA	3.637	6.751	11.198	2,08	2,11	1,91
10	BUZĂU	1.590	3.602	9.059	0,91	1,13	1,54
11	CARAȘ SEVERIN	5.711	8.643	11.478	3,26	2,71	1,95
12	CLUJ	5.858	11.446	20.334	3,34	3,58	3,46
13	CONSTANȚA	3.282	6.619	12.842	1,87	2,07	2,19
14	COVASNA	1.059	1.658	3.494	0,60	0,52	0,59
15	DÎMBOVIȚA	2.978	4.864	11.372	1,70	1,52	1,94
16	DOLJ	3.954	10.166	18.073	2,26	3,18	3,08
17	GALAȚI	3.321	10.497	25.425	1,90	3,29	4,33
18	GORJ	1.478	3.374	5.802	0,84	1,06	0,99
19	HARGHITA	2.090	3.154	6.579	1,19	0,99	1,21
20	HUNEDOARA	10.928	16.747	21.503	6,24	5,24	3,66
21	IALOMIȚA	1.005	2.872	5.272	0,57	0,90	0,90
22	IAȘI	3.893	8.731	19.113	2,22	2,73	3,25
23	ILFOV	2.417	4.312	7.433	1,38	1,35	1,26
24	MARAMUREȘ	4.102	5.068	7.952	2,34	1,59	1,35
25	MEHEDINȚI	1.379	2.451	6.447	0,79	0,76	1,10
26	MUREȘ	5.918	10.827	17.171	3,38	3,39	2,92
27	NEAMȚ	4.584	8.175	15.933	2,62	2,56	2,71
28	OLT	1.503	3.858	13.456	0,86	1,21	2,29
29	PRAHOVA	12.253	20.142	32.247	6,99	6,30	5,49
30	SATU MARE	2.087	3.610	7.688	1,19	1,13	1,31
31	SĂLAJ	447	782	2.082	0,25	0,24	0,35
32	SIBIU	6.395	11.414	21.287	3,65	3,57	3,62
33	SUCEAVA	3.544	5.906	9.928	2,02	1,85	1,69
34	TELEORMAN	1.551	3.040	6.970	0,88	0,95	1,19
35	TIMIȘ	6.602	11.544	20.659	3,77	3,61	3,52
36	TULCEA	903	1.453	2.675	0,52	0,46	0,45
37	VASLUI	1.226	2.243	4.907	0,70	0,70	0,83
38	VÎLCEA	1.318	2.777	5.638	0,75	0,87	0,96
39	VRANCEA	1.610	2.058	4.223	0,92	0,64	0,72
40	BUCUREȘTI	31.268	55.947	103.147	17,84	17,51	17,57
TOTAL R.S.R.		175.236	319.476	587.878	100,00	100,00	100,00

Tabelul 8

Dinamica producției globale industriale (lei)

Nr. crt.	JUDEȚUL	1965		1970		1975	
		L	A	L	A	L	A
1	ALBA	7.194	84.674	11.256	106.282	20.083	143.003
2	ARAD	10.268	104.163	14.115	136.166	23.303	178.569
3	ARGEȘ	7.314	80.676	18.354	173.721	36.125	245.853
4	BACĂU	11.627	121.528	16.434	169.314	23.825	213.548
5	BIHOR	6.810	80.504	12.749	122.323	22.335	170.939
6	BISTRIȚA NĂSĂUD	2.421	35.494	3.192	107.751	6.149	118.963
7	BOTOȘANI	2.528	141.140	3.811	172.361	6.886	180.357
8	BRAȘOV	25.226	109.422	46.090	183.099	75.885	249.284
9	BRĂILA	10.741	130.447	18.676	203.399	29.611	252.919
10	BUZĂU	3.391	114.463	7.134	71.614	17.303	236.164
11	CARAȘ SEVERIN	15.984	118.417	23.593	172.072	30.695	191.125
12	CLUJ	9.339	83.202	17.177	130.994	29.245	185.195
13	CONSTANȚA	7.075	116.342	12.895	179.221	23.162	242.398
14	COVASNA	6.012	81.650	8.991	102.037	17.923	149.771
15	DÎMBOVIȚA	7.093	102.425	10.928	123.798	24.267	168.041
16	DOLJ	5.744	130.194	14.038	221.096	24.093	275.675
17	GALAȚI	7.030	125.700	19.989	242.145	44.928	408.460
18	GORJ	4.973	67.836	10.642	119.366	17.385	162.996
19	HARGHITA	7.431	72.937	10.678	94.715	20.894	130.973
20	HUNEDOARA	23.118	115.600	33.186	189.669	41.447	233.525
21	IALOMIȚA	2.779	157.203	7.525	253.710	13.318	290.901
22	IAȘI	6.314	123.725	12.886	210.041	25.967	302.450
23	ILFOV	3.207	101.700	5.408	141.275	9.162	169.359
24	MARAMUREȘ	9.630	100.037	11.062	110.205	16.161	136.891
25	MEHEDINȚI	4.466	104.068	7.717	138.670	19.563	246.012
26	MUREȘ	10.580	129.815	18.276	177.739	27.851	216.121
27	NEAMȚ	9.788	134.212	16.073	194.620	29.330	260.347
28	OLT	3.167	301.082	7.734	333.997	25.819	366.928
29	PRAHOVA	17.547	118.659	26.760	182.170	40.618	228.422
30	SATU MARE	5.830	84.259	9.654	114.100	19.632	179.786
31	SĂLAJ	1.706	121.237	2.919	100.192	7.628	133.942
32	SIBIU	15.480	88.873	25.907	137.458	46.267	201.811
33	SUCEAVA	6.212	85.803	9.587	113.348	15.217	153.326
34	TELEORMAN	2.986	261.155	5.634	232.968	12.832	226.247
35	TIMIȘ	10.909	87.151	18.146	137.453	31.764	182.563
36	TULCEA	3.830	78.365	5.811	98.348	10.168	124.430
37	VASLUI	2.852	163.249	4.878	165.584	10.149	119.132
38	VÎLCEA	3.588	96.240	7.120	141.446	13.813	198.374
39	VRANCEA	4.601	127.343	5.536	145.052	10.884	209.641
40	BUCUREȘTI	21.621	105.358	35.532	159.595	60.432	298.349
TOTAL R.S.R.		9.210	106.633	15.775	157.490	27.624	218.120

L = producția globală industrială per locuitor
A = producția globală industrială per angajat

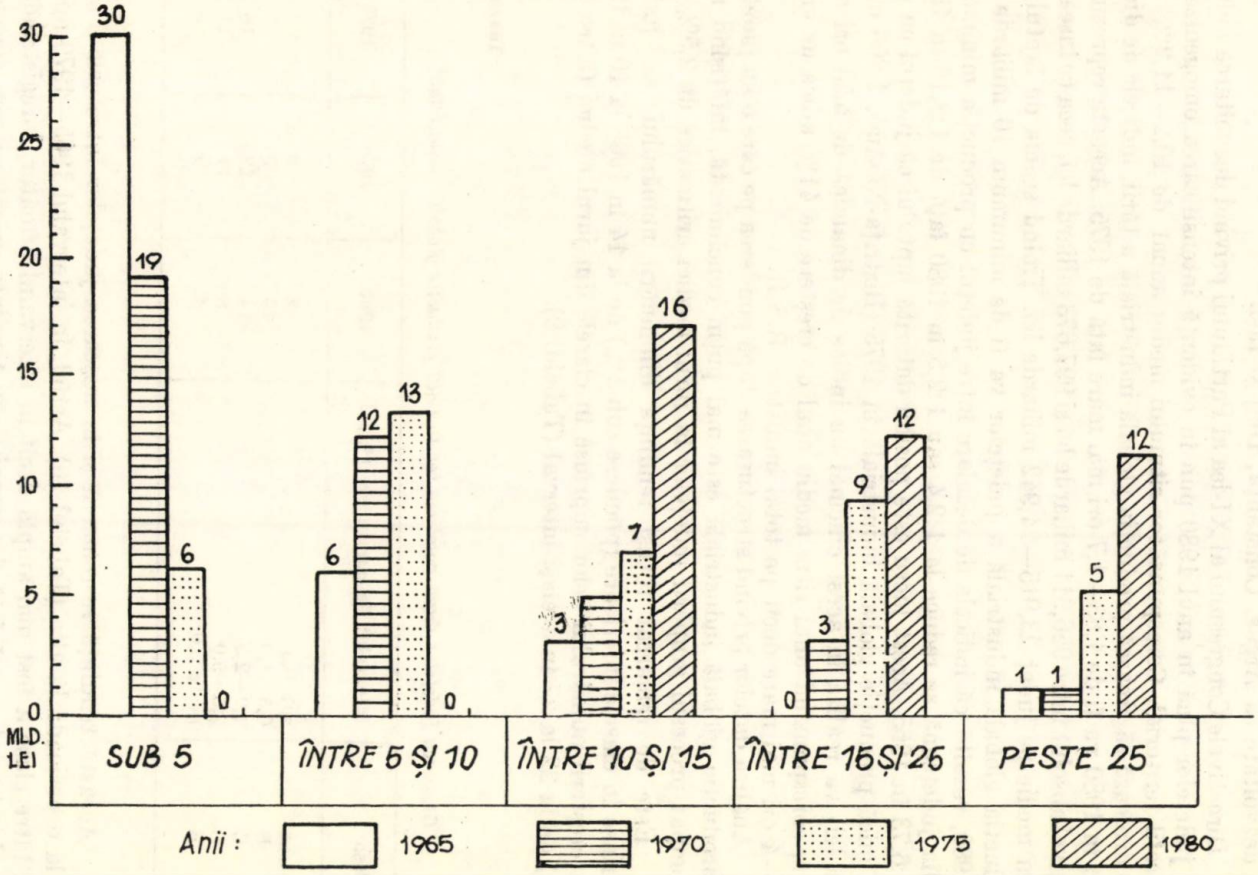


Fig. 1. *Graficul dinamicii numărului județelor după producția globală industrială*

Este semnificativ faptul că în anul 1980 numărul județelor cu o producție industrială de peste 15 miliarde lei va fi de 24, față de numai unul singur în 1965; în această categorie se numără de pe acum județe care în trecut erau slab dezvoltate ca Argeș, Constanța, Dolj și Iași.

Directivele Congresului al XI-lea al Partidului privind dezvoltarea industriei județelor pînă în anul 1980 pun în evidență intensificarea omogenizării în profil teritorial. Corespunzător ritmului mediu anual de 10,2—11,2% cu care urmează să crească producția globală industrială a țării, indicele de dinamică în 1980 va fi de 1,63—1,7 ori mai mare față de 1975. Aceasta reprezintă un nivel absolut între 956,611 miliarde lei și 997,673 miliarde lei, ceea ce înseamnă în medie pe județ 23,915—24,942 miliarde lei. Ținînd seama de faptul că producția globală industrială a județelor va fi de minumum 10 miliarde lei în 1980, rezultă că indicele de decalare între județul cu producția minimă și media județeană se reduce la 1:2,4 sau 1:2,5 în 1980 față de 1:8,16 în 1975 și 1:6,73 în 1965. Acest lucru este posibil datorită faptului că județul cu cea mai mică producție globală industrială în 1975 (Bistrița-Năsăud, 1,808 miliarde lei) va realiza în acest cincinal un indice de dinamică de 5,53 ori mai mare, corespunzînd unui ritm mediu anul de creștere de 41% adică de circa 3,5—4 ori mai mare decît pe total industrie R.S.R.

Analiza datelor privind structurarea după ponderea pe care o au județele în producția globală industrială este mai puțin concludentă, înfățișînd mai estompat procesul grupării județelor în jurul mediei aritmetice de 2,5%.

Este de remarcat totuși tendința diminuării numărului de județe cuprinse în clasele inferioare (pondere sub 1%) de la 14 în 1965 la 10 în 1975 și a creșterii numărului celor cuprinse în clasele din jurul mediei (între 1 și 5%) de la 22 la 27 în același interval (Tabelul 9).

Tabelul 9

Gruparea județelor după ponderea lor în total producție globală industrială

Clasa	Intervalul de cuprindere (%)	1965	1970	1975
A	sub 0,5	2	3	3
B	0,5—1,0	12	9	7
C	1,0—2,5	14	12	16
D	2,5—5,0	8	11	11
E	peste 5,0	4	4	3

Această tendință se remarcă și în mișcarea județelor între cele 5 clase de la o perioadă la alta (Tabelul 10). Astfel, în intervalul 1965—1970 mișcarea între clase a fost mai amplă decît în intervalul următor, înregistrîndu-se 10 schimbări de clasă față de numai 6, cu tendința orientării spre clasele de mijloc C și D.

Tabelul 10

Mişcarea judeţelor între clasele de ponderi în total producţie globală industrială

Perioada	1965—1970					1970—1975				
Pondere	în scădere		în creştere		Staţionar	în scădere		în creştere		Staţionar
Clasa	total	din care: din clasele superioare	total	din care: din clasele inferioare		total	din care: din clasele superioare	total	din care: din clasele inferioare	
A	3	1	—	—	—	1	—	2	—	—
B	5	1	3	—	1	1	1	5	—	1
C	6	1	7	3	—	6	1	9	3	1
D	5	—	6	4	—	6	1	5	—	—
E	3	—	1	—	—	2	—	1	—	—
TOTAL	22	3	17	7	1	16	3	22	3	2

Informaţii similare sînt prezentate în tabelele 11 şi 12 şi pentru mişcarea judeţelor între clasele de ponderi în total fonduri fixe industriale şi în total angajaţi în industrie.

Se observă grupările în clasele C şi D şi pierderile de pondere pentru judeţele din clasa E, expresie a reducerii decalajelor între judeţe.

În ce priveşte producţia industrială per capita au fost analizaţi indicatorii de producţie industrială pe locuitor şi producţie industrială pe angajat în industrie.

Tabelul 11

Mişcarea judeţelor între clasele de ponderi în total fonduri fixe industriale

Perioada	1965—1970					1970—1975				
Pondere	în scădere		în creştere		Staţionar	în scădere		în creştere		Staţionar
Clasa	total	din care: din clasele superioare	total	din care: din clasele inferioare		total	din care: din clasele superioare	total	din care: din clasele inferioare	
A	1	—	2	—	—	—	—	2	—	—
B	5	—	3	2	—	—	—	4	1	1
C	7	1	8	2	—	8	2	10	3	—
D	4	1	6	4	—	4	1	5	3	—
E	4	—	—	—	—	3	—	3	3	—
TOTAL	21	2	19	8	—	15	3	24	10	1

Tabelul 12

Mișcarea județelor între clasele de ponderi în total angajați în industrie

Perioada	1965—1970					1970—1975				
Pondere	în scădere		în creștere		Staționar	în scădere		în creștere		Staționar
Clasa	total	din care: din clasele superioare	total	din care: din clasele inferioare		total	din care: din clasele superioare	total	din care: din clasele inferioare	
A	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—
B	1	—	9	5	—	—	—	9	2	—
C	3	—	11	1	—	6	3	13	3	—
D	6	1	5	—	—	6	—	2	1	1
E	3	—	—	—	—	3	—	—	—	—
TOTAL	14	2	26	6	—	15	3	24	6	1

Producția globală industrială pe locuitor (Tabelul 13) pune în evidență tendința județelor către grupele de mijloc (nivel 10.000—30.000 lei pe locuitor). Este un proces încă în plină desfășurare la a cărei transformare calitativă vor avea un rol deosebit realizările actualului cincinal. În cadrul acestei structuri este de remarcat faptul că în anul 1975 minima producției globale industriale pe locuitor era de peste 6000 lei, nivel, sub care în 1965, se găseau 16 județe. De asemenea în anul 1975 numărul județelor cu producție globală industrială de peste 15.000 lei pe locuitor era de 30 față de numai 6 în 1965.

Tabelul 13

Gruparea județelor după valoarea producției globale industriale pe locuitor

Grupe	1965	1970	1975
sub 10.000 lei	29	16	4
între 10.000 și 20.000 lei	8	18	13
între 20.000 și 30.000 lei	3	3	14
între 30.000 și 50.000 lei	—	3	7
peste 50.000 lei	—	—	2

Același proces de deplasare către grupele valorice superioare este evident și în ceea ce privește producția globală industrială pe angajat în industrie (Tabelul 14). Astfel, în anul 1976 minima producției globale industriale pe

Tabelul 14

Gruparea județelor după valoarea producției globale industriale pe un angajat în industrie

Grupa	1965	1970	1975
sub 100.000 lei	14	3	—
între 100.000 și 150.000 lei	22	18	7
între 150.000 și 250.000 lei	3	17	25
peste 250.000 lei	1	2	8

angajat era de 120.000 lei, în timp ce în anul 1965, 26 de județe se aflau sub acest nivel, din care 14 sub 100.000 lei.

Reducerea decalajelor la acest important indicator de intensitate — producția globală industrială pe locuitor — este exprimată și de reducerea indicelui de decalare între nivelul minim și nivelele medii și maxime înregistrate (Tabelul 15). Astfel decalajul între nivelul minim și cel mediu s-a redus de la 1:5,4 în 1965 la 1:4,49 în 1975, iar decalajul între nivelul minim și cel maxim s-a redus de la 1:14,79 în 1965 la 1:12,34 în 1975. Considerînd media pe economia națională egală cu unitatea, intervalul de variație al județelor, este [0,19; 2,74] în 1965, [0,19;2,92] în 1970 și [0,22; 2,75] în 1975, exprimînd tendințe de apropiere în continuare a nivelurilor de dezvoltare ale județelor.

Informații similare sînt prezentate și pentru alți indicatori absoluți sau „per capita" (Tabelul 15).

La nivelul ansamblului economiei, ca și pentru ramura industriei, indicatorii absoluți evidențiază, pentru nivelele maxime, detașarea netă a municipiului București, motiv pentru care a fost luat în studiu separat.

Pentru indicatorii „per capita" acest decalaj nu mai apare; municipiul București apare chiar la nivel în jurul mediei pentru unii indicatori cum sînt: valoarea fondurilor fixe (Tabelul 16), valoarea fondurilor fixe din industrie (Tabelul 17) și valoarea producției globale industriale (vezi Tabelul 8).

Dinamica indicilor de decalare pentru indicatorii globali pe economie exprimă o reducere a decalajului în ce privește numărul de angajați (vezi Tabelul 15). Astfel, amplitudinea intervalului minim — maxim în raport cu media s-a redus între 1965—1975 cu circa 15%.

Dinamica indicilor de decalare pentru industrie exprimă o tendință fermă, pronunțată, de reducere a decalajului pentru toți indicatorii studiați: producție globală, fonduri fixe și număr de angajați, atît pentru mărimile absolute, cît și pentru mărimile „per capita".

Dimensiunile acestei reduceri de decalaj prezentate în Tabelul 18 reies din reducerea procentuală a amplitudinii intervalului minim-maxim în raport cu media, din perioada 1965-1975, față de mărimea acestei amplitudini înregistrată în anul de bază.

Tabelul 15

Omogenizarea dezvoltării economice în profil teritorial

Nr. crt.	Indicator	Anul	Județul cu nivel minim	Raportul medie—minim	Județul cu nivel maxim	Raportul maxim—minim	Intervalul minim—maxim în raport cu media	
							minim	maxim
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Număr total de angajați	1965	Sălaj	4,09	București	26,76	0,24	6,55
					Prahova	7,83	0,24	1,91
		1970	Sălaj	3,71	București	23,50	0,27	6,33
					Prahova	6,76	0,27	1,82
		1975	Sălaj	3,41	București	21,31	0,29	6,25
					Prahova	5,90	0,29	1,73
2	Valoarea pe locuitor a fondurilor fixe din unitățile socialiste	1965	Sălaj	3,02	Hunedoara	7,20	0,33	2,38
		1970	Sălaj	3,32	București	6,71	0,31	2,08
		1975	Sălaj	3,44	București	6,60	0,29	1,92
3	Valoarea pe angajat a fondurilor fixe din unitățile socialiste	1965	Bihor	1,58	Hunedoara	2,48	0,63	1,57
		1970	Satu Mare	1,76	Hunedoara	2,59	0,57	1,47
		1975	Satu Mare	1,72	Galați	2,75	0,58	1,60
4	Numărul de angajați la o mie de locuitori	1965	Botoșani	2,48	București	5,35	0,40	2,15
					Brașov	4,38	0,40	1,77
		1970	Botoșani	2,47	București	5,04	0,40	2,04
					Brașov	4,35	0,40	1,76
		1975	Botoșani	2,23	București	4,34	0,45	1,94
					Brașov	3,93	0,45	1,76
5	Fonduri fixe în industrie (valoare)	1965	Bistrița	9,07	București	39,63	0,11	4,37
					Hunedoara	35,64	0,11	3,93
		1970	Bistrița	10,92	București	45,63	0,09	4,18
					Hunedoara	32,63	0,09	2,99
		1975	Bistrița	6,25	București	24,50	0,16	3,92
			Sălaj		Argeș	14,50	0,16	2,32
					Prahova			
					Hunedoara			
6	Numărul de angajați în industrie	1965	Sălaj	11,18	București	80,49	0,09	7,20
					Prahova	28,01	0,09	2,51
		1970	Sălaj	6,40	București	44,91	0,16	7,02
					Brașov	15,28	0,16	2,39
		1975	Bistrița	4,43	București	28,70	0,23	6,49
					Brașov	10,11	0,23	2,28

Tabelul 15 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	Producția globală industrială (valoare)	1965	Bistrița	6,73	București	48,03	0,15	7,14
					Prahova	18,82	0,15	2,80
		1970	Bistrița	8,89	București	62,30	0,11	7,00
					Brașov	24,32	0,11	2,73
		1975	Bistrița	8,16	București	57,05	0,12	7,03
					Brașov	21,18	0,12	2,61
8	Producția globală, industrială pe locuitor	1965	Sălaj	5,40	Brașov	14,79	0,19	2,74
		1970	Sălaj	5,40	Brașov	15,79	0,19	2,92
		1975	Sălaj	4,49	Brașov	12,34	0,22	2,75
9	Valoarea pe locuitor a fondurilor fixe din industrie	1965	Vaslui	5,48	Hunedoara	21,66	0,18	3,95
		1970	Vaslui	5,19	Hunedoara	15,55	0,18	3,00
		1975	Botoșani	4,63	Hunedoara	11,00	0,22	2,38
10	Număr de angajați în industrie la o mie de locuitori	1965	Olt	7,91	Brașov	21,00	0,13	2,66
		1970	Botoșani	4,50	Brașov	11,45	0,22	2,55
		1975	Botoșani	3,34	Brașov	8,00	0,30	2,39
11	Valoarea pe un angajat a fondurilor fixe în industrie	1965	Satu Mare	2,67	Olt	17,65	0,37	6,61
		1970	Satu Mare	2,86	Olt	10,02	0,35	3,50
		1975	Satu Mare	2,65	Vîlcea	6,77	0,38	2,56
12	Valoarea producției globale pe un angajat în industrie	1965	Bistrița	3,00	Olt	8,48	0,33	2,82
		1970	Harghita	1,66	Olt	3,53	0,60	2,12
		1975	Bistrița	1,83	Galați	3,43	0,55	1,87

Tabelul 16

Dinamica fondurilor fixe

Nr. crt.	Județul	1965		1970		1975	
		L.	A.	L.	A.	L.	A.
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Alba	14.043	71.489	20.231	84.953	34.926	120.901
2.	Arad	13.471	55.746	21.767	82.683	32.842	106.296
3.	Argeș	11.506	52.308	33.515	128.454	64.304	199.944
4.	Bacău	22.188	102.939	33.654	155.945	48.132	193.455
5.	Bihor	9.998	46.949	20.975	84.420	34.133	119.167
6.	Bistrița-Năsăud	8.078	67.879	11.968	84.628	19.199	107.319

Tabelul 16 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8
7.	Botoşani	6.318	69.305	8.625	84.297	13.306	99.802
8.	Braşov	32.760	82.142	47.559	107.010	77.530	148.313
9.	Brăila	16.432	65.740	36.326	138.224	59.210	195.384
10.	Buzău	6.989	57.171	14.917	97.982	26.350	131.893
11.	Caraş-Severin	25.220	88.911	33.453	115.630	49.725	148.633
12.	Cluj	16.279	61.016	26.664	89.048	41.720	122.088
13.	Constanţa	27.447	92.128	46.636	130.499	83.914	214.208
14.	Covasna	11.649	62.902	17.581	77.922	30.757	111.657
15.	Dîmboviţa	18.434	110.006	23.304	114.934	43.361	150.922
16.	Dolj	8.468	48.291	27.287	133.525	42.535	175.025
17.	Galaţi	13.991	61.107	42.541	159.116	73.620	246.521
18.	Gorj	19.825	109.678	30.661	139.937	58.249	208.360
19.	Harghita	13.863	65.458	18.478	72.564	31.654	101.497
20.	Hunedoara	40.054	116.493	53.652	161.817	76.355	219.468
21.	Ialomiţa	13.049	66.274	26.954	115.641	42.664	179.479
22.	Iaşi	10.299	58.619	19.401	98.137	33.844	145.934
23.	Ilfov	11.221	96.057	18.985	125.081	31.392	184.819
24.	Maramureş	12.199	57.166	19.282	86.046	27.586	108.853
25.	Mehedinţi	7.277	47.386	17.760	89.974	43.503	202.200
26.	Mureş	14.322	63.681	26.775	108.828	40.683	142.108
27.	Neamţ	18.457	106.851	23.794	128.587	41.117	176.013
28.	Olt	11.449	95.063	19.715	138.969	38.896	192.325
29.	Prahova	29.714	100.705	37.491	121.365	55.667	162.180
30.	Satu Mare	7.889	47.755	12.687	62.571	22.467	89.776
31.	Sălaj	5.564	55.383	8.599	66.950	15.271	90.217
32.	Sibiu	18.008	58.484	26.340	79.547	40.542	104.382
33.	Suceava	10.196	56.032	16.243	80.759	24.076	107.737
34.	Teleorman	8.469	73.673	15.897	125.943	30.509	171.021
35.	Timiş	20.362	67.770	26.925	84.392	45.352	118.458
36.	Tulcea	14.370	71.876	22.224	105.673	45.341	173.625
37.	Vaslui	6.802	60.030	10.302	97.251	19.532	121.389
38.	Vîlcea	8.459	58.516	19.437	101.835	46.715	201.341
39.	Vrancea	8.551	58.009	12.799	80.763	21.781	116.888
40.	Bucureşti	38.074	78.154	57.701	112.343	87.806	152.229
TOTAL R.S.R		16.806	74.274	27.738	109.964	45.830	154.529

L = Total fonduri fixe per locuitor
A = Total fonduri fixe per angajat

Tabelul 17

Dinamica fondurilor fixe din industrie

Nr.crt.	Judeţ	1965		1970		1975	
		L	A	L	A	L	A
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Alba	5.691	66.986	7.795	73.595	15.054	107.191
2.	Arad	3.826	38.812	5.808	56.026	9.778	74.926
3.	Argeş	5.054	55.741	18.520	175.285	38.686	263.281
4.	Bacău	13.003	135.938	19.081	196.588	25.992	232.973
5.	Bihor	3.010	35.577	7.338	70.409	13.536	103.591

Tabelul 17 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8
6.	Bistrita-Năsăud	1.190	38.365	1.777	59.995	5.510	106.593
7.	Botoşani	1.378	76.952	2.291	103.645	4.116	107.799
8.	Braşov	15.676	67.997	22.857	90.803	40.131	131.832
9.	Brăila	6.087	73.921	15.160	165.105	24.635	210.412
10.	Buzău	2.085	71.917	6.171	148.459	10.832	147.840
11.	Caraş-Severin	12.287	91.026	16.326	119.075	23.830	148.381
12.	Cluj	9.558	48.504	17.814	74.687	31.412	106.978
13.	Constanţa	3.579	79.582	7.076	127.667	12.816	168.199
14.	Covasna	1.500	53.662	2.114	66.773	4.383	104.162
15.	Dîmboviţa	11.656	168.323	13.263	150.181	25.065	173.567
16.	Dolj	2.494	56.536	12.784	201.348	17.278	197.700
17.	Galaţi	4.170	74.565	20.138	243.945	37.934	344.874
18.	Gorj	9.428	128.603	15.253	171.089	29.128	273.092
19.	Harghita	4.035	39.609	5.295	46.967	12.862	80.626
20.	Hunedoara	24.124	128.015	32.328	184.765	45.280	255.126
21.	Ialomiţa	1.532	86.657	4.926	166.078	11.355	245.875
22.	Iaşi	2.770	54.283	6.614	107.799	13.757	160.237
23.	Ilfov	2.586	82.008	3.887	101.533	6.990	129.212
24.	Maramureş	5.062	52.579	7.884	78.544	13.314	97.624
25.	Mehedinţi	1.535	35.771	5.229	93.975	22.122	278.181
26.	Mureş	5.757	70.633	13.002	126.455	20.366	158.035
27.	Neamţ	10.610	145.484	13.688	165.742	24.605	218.422
28.	Olt	4.894	465.345	8.864	382.824	19.430	276.123
29.	Prahova	15.794	106.806	19.753	134.471	29.590	166.406
30.	Satu Mare	1.824	26.364	3.233	38.212	6.205	56.826
31.	Sălaj	1.248	88.690	2.459	84.433	5.935	104.220
32.	Sibiu	7.843	45.027	11.968	63.503	19.368	84.480
33.	Suceava	3.180	43.918	5.636	66.635	9.313	93.836
34.	Teleorman	2.191	191.615	6.142	253.966	13.423	236.667
35.	Timiş	4.665	37.265	6.748	51.116	14.324	82.325
36.	Tulcea	4.691	95.982	7.830	132.530	20.017	244.953
37.	Vaslui	1.144	63.782	2.079	70.574	6.701	131.483
38.	Vilcea	3.329	89.303	9.097	180.716	26.794	384.786
39.	Vrancea	1.655	45.760	3.128	81.971	6.263	120.631
40.	Municipiul Bucureşti	8.769	42.732	14.489	65.077	23.256	90.995
Total R.S.R.		6.102	70.435	10.784	109.373	19.065	150.538

L = fonduri fixe din industrie per locuitor
A = fonduri fixe din industrie per persoană ocupată

Tabelul 18

Reducerea procentuală a amplitudinii intervalului minim-maxim în raport cu media

Nr. crt.	Indicatorul	Cuantumul reducerii (%)
1	2	3
1	Producţia globală industrială	
	a)	1,1
	b)	6,0

Tabelul 18 (continuare)

1	2	3
2	Fonduri fixe în industrie	
	a)	11,8
	b)	43,6
3	Numărul de angajaţi în industrie	
	a)	11,9
	b)	15,3
4	Producţia globală industrială pe locuitor	0,8
5	Producţia globală industrială la un angajat în industrie	47,0
6	Fonduri fixe industriale la un locuitor	42,7
7	Fonduri fixe industriale la un angajat în industrie	65,1
8	Număr de angajaţi în industrie la mia de locuitori	17,4

Observaţie: Pentru indicatorii 1, 2 şi 3 apar cîte două cifre; prima (înscrisă la punctul *a*) se referă la municipiul Bucureşti care sub raportul valorilor absolute atinge nivelele cele mai mari; a doua (înscrisă la punctul *b*) se referă la judeţul cu nivel maxim.

Omogenizarea nivelurilor de dezvoltare în cincinalul următor este o trăsătură pregnantă a dezvoltării industriale a judeţelor. Pornind de la unele cifre de prognoză privind nivelul producţiei industriale în anul 1980 [5] pentru judeţele Ialomiţa, Vaslui şi Vrancea se poate constata creşterea accentuată a producţiei lor pe locuitor (Tabelul 19), creşterea ponderii acestor judeţe în totalul producţiei globale industriale (Tabelul 20) şi reducerea decalajului

Tabelul 19

Producţia globală industrială pe locuitor în 1980

Judeţul	Producţia globală industrială (mil. lei)	Populaţie	Producţie globală industrială pe locuitor (lei)	Indice de creştere 1980 faţă de 1965
Ialomiţa	11.500	414.176	27.766	1.000
Vaslui	12.000	512.801	23.401	821
Vrancea	10.000	408.570	24.476	532
TOTAL R.S.R.	997.673	22.450.000	44.440	482

Tabelul 20

Dinamica ponderii judeţelor în total producţia globală industrială

Judeţul	Anul			
	1965	1970	1975	1980
Ialomiţa	0,57	0,90	0,90	1,15
Vaslui	0,70	0,70	0,83	1,20
Vrancea	0,92	0,64	0,72	1,00

Tabelul 21

Raportul nivel județean/medie, privind producția globală industrială pe locuitor

Județul	Anul			
	1965	1970	1975	1970
Ialomița	0,302	0,477	0,482	0,625
Vaslui	0,310	0,309	0,367	0,527
Vrancea	0,500	0,351	0,394	0,551

dintre ele și media pe economia națională (Tabelul 21). La baza calculelor am utilizat o variantă proprie de prognoza populației pe județe elaborată cu ajutorul ritmului mediu anual de creștere pe 10 ani (1965—1975).

Valoarea producției globale industriale pe total R.S.R. (al cărui calcul a fost prezentat mai sus) a fost luată la nivelul maxim. Se observă că indicele de devansare față de medie este de 2,1 pentru județul Ialomița, de 1,4 pentru județul Vaslui și 1,1 pentru județul Vrancea.

Cifrele evidențiază saltul calitativ obținut în cincinalul 1976—1980 pentru situația acestor trei județe. Concluzii asemănătoare se desprind și pe baza dinamicii raportului față de medie al acestor trei județe privind indicatorul producției globale industriale pe locuitor. Nivelele prognozate pentru anul 1980 marchează o creștere netă, de natură calitativă, caracteristică dezvoltării întregii noastre societăți.

O importantă mutație calitativă în procesul omogenizării dezvoltării teritoriale este evidențiată de intensificarea gradului de participare a județelor rămase în urmă în trecut la realizarea producției globale industriale (vezi în acest sens și [6].) În Tabelul 22 este prezentată o grupare pe 5 clase a jude-

Tabelul 22

Dinamica structurii producției globale industriale (PGI) pe clase de județe conform ponderii deținute în total R.S.R. în anul 1960

Clasa	Intervalul de ponderi	Județele	Pondere în PGI			
			1960	1965	1970	1975
1	peste 8%	BUCUREȘTI	17,5	17,8	17,5	17,6
2	3,0 — 8,0%	Bacău, Brașov, Cluj, Caraș-Severin, Hunedoara, Mureș, Prahova, Sibiu, Timiș	42,4	40,8	38,6	33,9
3	2,0 — 2,9%	Arad, Bihor, Brăila, Dîmbovița, Galați, Maramureș, Neamț, Suceava	19,1	17,7	17,5	18,3
4	1,0 — 1,9%	Alba, Argeș, Buzău, Constanța, Dolj, Harghita, Iași, Ilfov, Satu-Mare	13,1	14,9	17,2	19,0
5	sub 1%	Bistrița, Botoșani, Covasna, Galați, Ialomița, Mehedinți, Olt, Sălaj, Teleorman, Tulcea, Vaslui, Vîlcea, Vrancea	7,9	8,8	9,2	11,2

ţelor după ponderea pe care o deţineau în anul 1960 în producţia globală industrială şi dinamica ponderii fiecărei grupe în total R.S.R. Se poate observa creşterea ponderii judeţelor din clasele 4 şi 5 de la 21% în 1960 la 30,2% în 1975, ceea ce reflectă tocmai procesul apropierii nivelurilor de dezvoltare a judeţelor rămase în urmă de cele dezvoltate.

Acest lucru, este marcat, totodată, de reducerea numărului judeţelor cu ponderi sub 1%, de la 13 în 1960, la 10 în 1975.

O situaţie similară este prezentată pentru indicatorul valorii fondurilor fixe din industrie (Tabelul 23) şi pentru numărul de angajaţi în industrie (Tabelul 24), anul de bază pentru grupare fiind 1965. Aceşti indicatori subliniază tendinţa descrisă mai sus. Astfel, pentru fondurile fixe, ponderea claselor 4 şi 5 creşte de la 27,2% în 1965 la 39,7% în 1975, iar pentru numărul de angajaţi în industrie, de la 25,9% în 1965 la 33,6% în 1975. Numărul judeţelor

Tabelul 23

Dinamica structurii fondurilor fixe din industrie (FFI) pe clase de judeţe conform ponderii deţinute în total R.S.R. în anul 1965

Clasa	Intervalul de ponderi	Judeţele	Pondere în FFI		
			1965	1970	1975
1	peste 8%	Bucureşti, Hunedoara, Prahova	30,24	24,72	21,40
2	3,00—8,00%	Bacău, Braşov, Caraş Severin, Dîmboviţa, Neamţ	24,89	19,26	17,80
3	2,00—2,99%	Argeş, Cluj, Gorj, Mureş, Olt, Sibiu, Timiş	17,63	19,95	21,11
4	1,00—1,99%	Alba, Arad, Bihor, Braşov, Constanţa, Dolj, Galaţi, Iaşi, Ilfov, Maramureş, Suceava, Vîlcea	19,45	26,83	27,30
5	sub 1%	Bistriţa, Botoşani, Buzău, Covasna, Harghita, Ialomiţa, Mehedinţi, Satu-Mare, Sălaj, Teleorman, Tulcea, Vaslui, Vrancea	7,79	9,24	12,39

Tabelul 24

Dinamica structurii numărului de angajați din industrie (NrAi) pe clase de județe conform ponderii deținute în total R.S.R. în anul 1965

Clasa	Intervalul de ponderi	Județul	Pondere în *NrAi*		
			1965	1970	1975
1	peste 8%	București	18,00	17,55	16,21
2	3,00—8,00%	Bacău, Bihor, Brașov, Cluj, Hunedoara, Prahova, Sibiu, Timiș	37,53	35,00	32,48
3	2,00—2,99%	Arad, Argeș, Caraș-Severin, Maramureș, Mureș, Neamț, Suceava	18,53	18,15	17,75
4	1,00—1,99%	Alba, Brăila, Constanța, Dîmbovița, Dolj, Galați, Gorj, Harghita, Iași, Ilfov, Satu Mare	18,48	20,31	21,75
5	sub 1%	Bistrița, Botoșani, Buzău, Covasna, Ialomița, Mehedinți, Olt, Sălaj, Teleorman, Tulcea, Vaslui, Vîlcea, Vrancea	7,46	8,99	11,81

cu ponderi sub 1% scade totodată pentru fonduri fixe de la 13 în 1965 la 7 în 1975 și de la 13 în 1965 la 9 în 1975 pentru număr de angajați în industrie.

Prezența tot mai activă a industriei în geografia economică a tuturor zonelor țării este însoțită de modificări calitative superioare în structura pe ramuri a producției industriale în profil teritorial. În anul 1975, într-un număr de 17 județe, metalurgia, construcțiile de mașini și chimia dețineau peste 50% din producția industrială, proporție caracteristică industriilor moderne [2].

Analiza structurii producției industriale în profil teritorial pune în evidență importante schimbări, a căror esență o constituie creșterea ponderii ramurilor industriei de bază, față de situația din trecut, cînd în marea majoritate a județelor, 60—70% din întreaga producție a județului o dădeau industria ușoară, alimentară și exploatările forestiere [6]. Astfel, în ce privește industria construcțiilor de mașini, aceasta este prezentă în toate județele țării, față de numai 8—10 centre în 1938, unele cu ponderi importante în totalul producției țării (1973): Argeș 5,3%, Dolj 4,2%, Dîmbovița 3% etc. La

industria chimică, prezentă de asemenea în toate județele țării, participă cu ponderi însemnate (peste 4% din total țară) județe care în trecut nu aveau o asemenea producție: Argeș, Bacău, Dolj, Iași, Mureș, Neamț, Vîlcea. Pe planul asigurării bazei energetice, 11 județe aveau în 1973 o putere instalată egală cu a întregii țări în anul 1938: Dolj, Hunedoara, Mehedinți, Mureș, Argeș, Bacău, Gorj etc.

* * *

Ansamblul tuturor acestor aspecte conturează implicațiile social-economice ale unui proces de mari proporții, menit să creeze în fiecare zonă și localitate condiții de muncă și de viață demne de epoca construirii societății socialiste multilateral dezvoltate în România.

Sarcinile conturate în acest sens în Programul partidului, în prognozele de dezvoltare a țării pînă în anul 2000, liniile directoare trasate de Congresul al XI-lea al partidului privind dezvoltarea economico-socială la orizontul 1990, și prevederile planului național unic de dezvoltare economico-socială în cincinalul 1976—1980, evidențiază că strategia partidului de dezvoltare multilaterală a țării are în vedere o astfel de diferențiere a ritmului de creștere pe ramuri și pe sectoare, încît, o dată cu progresul general, să se obțină pe toate planurile (departamental, pe ramuri și teritorial) o permanentă îmbunătățire a structurilor economice, modernizarea lor în concordanță cu imperativele revoluției tehnico-științifice.

Un loc important în acest proces revine perfecționării structurii teritoriale a forțelor de producție, prin promovarea în continuare a politicii de dezvoltare proporțională a tuturor județelor și localităților patriei, de ridicare a gradului de civilizație a întregului popor. Înfăptuirea, începînd din acest cincinal, a Programului național de sistematizare a teritoriului va determina o puternică înflorire economico-socială a tuturor județelor țării, ridicarea industriei la rang de ramură preponderentă în cadrul fiecărui județ, valorificarea mai bună a resurselor naturale și de muncă, crearea de noi centre urbane. Sensul major al politicii în acest domeniu îl constituie asigurarea unor condiții tot mai bune de viață pentru toți cetățenii țării, fără deosebire de naționalitate, în spiritul principiilor eticii și echității socialiste.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Directivele Congresului al XI-lea al P.C.R.* „Congresul al XI-lea al P.C.R.", Editura politică, București, 1975.
2. NICOLAE CEAUȘESCU: *Planul cincinal — o nouă etapă de progres și prosperitate în viața poporului român, în înflorirea României socialiste, 28 iunie 1966.* „România pe drumul desăvîrșirii construcției socialiste", volumul I, Editura politică, București, 1968.
3. MĂNESCU MANEA: *România deceniului 8.* Era socialistă, București, nr. 4, 1976.
4. BLAGA I.: *Repartizarea teritorială a forțelor de producție în România.* Editura științifică, București, 1974.
5. CEOPONEA M.: *Dezvoltarea economiei românești în profil teritorial.* Revista economică București, nr. 5, 1976.
6. POPESCU M.: *Coordonate ale politicii de repartizare teritorială a forțelor de producție.* Era, socialistă, București, nr. 24, 1974.
7. CEOPONEA M.: *Schimbări structurale în repartizarea teritorială a industriei.* Revista economică, București, nr. 17, 1975.

6.04.1977

M. ALEXANDRU
Centrala Minereurilor
Neferoase — Deva

Modele pentru prognoza proceselor din industria minieră

Utilizarea modelelor matematice și a calculatoarelor electronice în rezolvarea problemelor de prognoză poate determina un salt deosebit în acțiunea de introducere a prognozei tehnologice și economice în activitatea de planificare și conducere a proceselor de producție miniere. Pe această cale se va realiza o utilizare mai rațională a forței de muncă, a capacităților de producție, o exploatare mai bună a zăcămintelor miniere și, în final, o sporire a eficienței economice a întregii activități din industria minieră.

În cele ce urmează se vor prezenta două proceduri de calcul a prognozei proceselor miniere, utilizînd tehnica de calcul electronic al datelor.

În industria minieră prognoza proceselor tehnologice și economice, pe termen scurt și mijlociu, devine de o necesitate imperioasă pe măsura creșterii capacităților de producție ale unităților existente, a deschiderii de cîmpuri miniere noi, precum și a cererii crescînde de materie primă din partea economiei naționale. Încadrîndu-se în acțiunea științifică de prognoză pe termen lung a tuturor ramurilor economiei naționale, prognoza pe termen scurt și mijlociu trebuie să devină o practică curentă de lucru, care să contribuie la conducerea previzională a proceselor de producție miniere, punînd la dispoziția decidentului datele necesare elaborării celor mai adecvate soluții.

PROCEDURA

Are la bază modelul de creștere dinamică propus în [4], model ușor adaptabil specificului proceselor miniere, datorită îmbinării vitezei relative de creștere a fenomenului cu efectul remanent datorat factorilor perturbatori. Astfel, prognoza unui proces pentru timpul t este dată de relația

$$P_t = P_0 K^t (1 + \alpha)^{t(t-1)/2} \qquad (1)$$

unde:

P_0 reprezintă valoarea inițială a procesului:

K — ritmul direcției fundamentale de mișcare;

$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n} (P_i/P_0)^{6/n(n+1)}}{(P_n/P_0)^{2/n}}; \tag{2}$$

$(1 + \alpha)$ — efectul remanent al dezvoltării:

$$(1 + \alpha) = \frac{(P_n/P_0)^{6/n(n-1)}}{\prod_{i=1}^{n} (P_i/P_0)^{12/n(n+1)(n-1)}}; \tag{3}$$

n și P_n — volumul selecției, respectiv, valoarea finală a procesului pentru perioada considerată.

Programul de calcul în limbaj FORTRAN, avînd la bază schema logică generală (fig. 1) și detaliată (fig. 2), utilizează relațiile 1, 2, 3. El permite calcularea, în prima fază, a ritmului direcției fundamentale de mișcare și a efectului remanent pentru valorile șirului de bază — verificîndu-se astfel modelul prin calculul abaterilor valorilor prognozate față de cele existente; în faza următoare asigură calculul prognozei pentru timpul t, care are la bază atît datele inițiale, cît și prognoza P_{t-1} a procesului.

Modelul a fost experimentat pentru producția de minereu de la Exploatarea minieră Deva, luînd ca date de bază producțiile anilor 1965—1975.

Modelul de creștere dinamică utilizat în acest caz poate oferi o imagine realistă a procesului pentru etapele viitoare, însă nu evidențiază factorii care determină variația ritmului de dezvoltare și a efectului remanent și intensitatea cu care factori participă la dinamica întregului proces. Față de alte metode și modele de creștere dinamică, modelul care îl propunem oferă avantajul de a include efectele factorilor perturbatori, valorile prognozate fiind mult apropiate de tendințele reale de dezvoltare a procesului. Programul prevede limitarea valorilor prognozate cu restricțiile sistemului. Un astfel de model poate fi utilizat cu succes la prognoza producției zilnice a unei unități miniere, putînd fi intregrat într-un sistem operativ de conducere a producției.

PROCEDURA II

Prognoza unui proces complex de tipul unei producții miniere, care este strîns legată de parametrii fizici cantitativi (lungime front abataj, viteza de avansare, dimensiunea cîmpului minier și a panoului), de parametrii calitativi (soluții tehnologice de mecanizare a tăierii și de susținere a abatajelor, metode de deschidere, pregătire și exploatare a zăcămintelor), precum și de para-

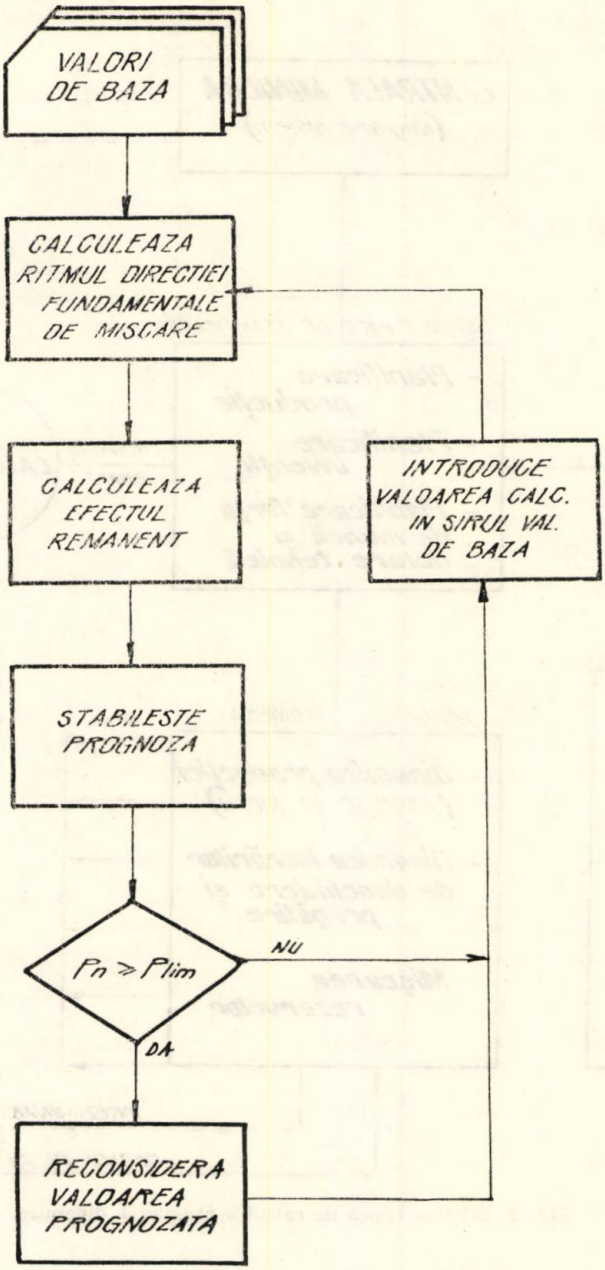


Fig. 1. Schema generală de calcul a dinamicii relative de dezvoltare a procesului economic.

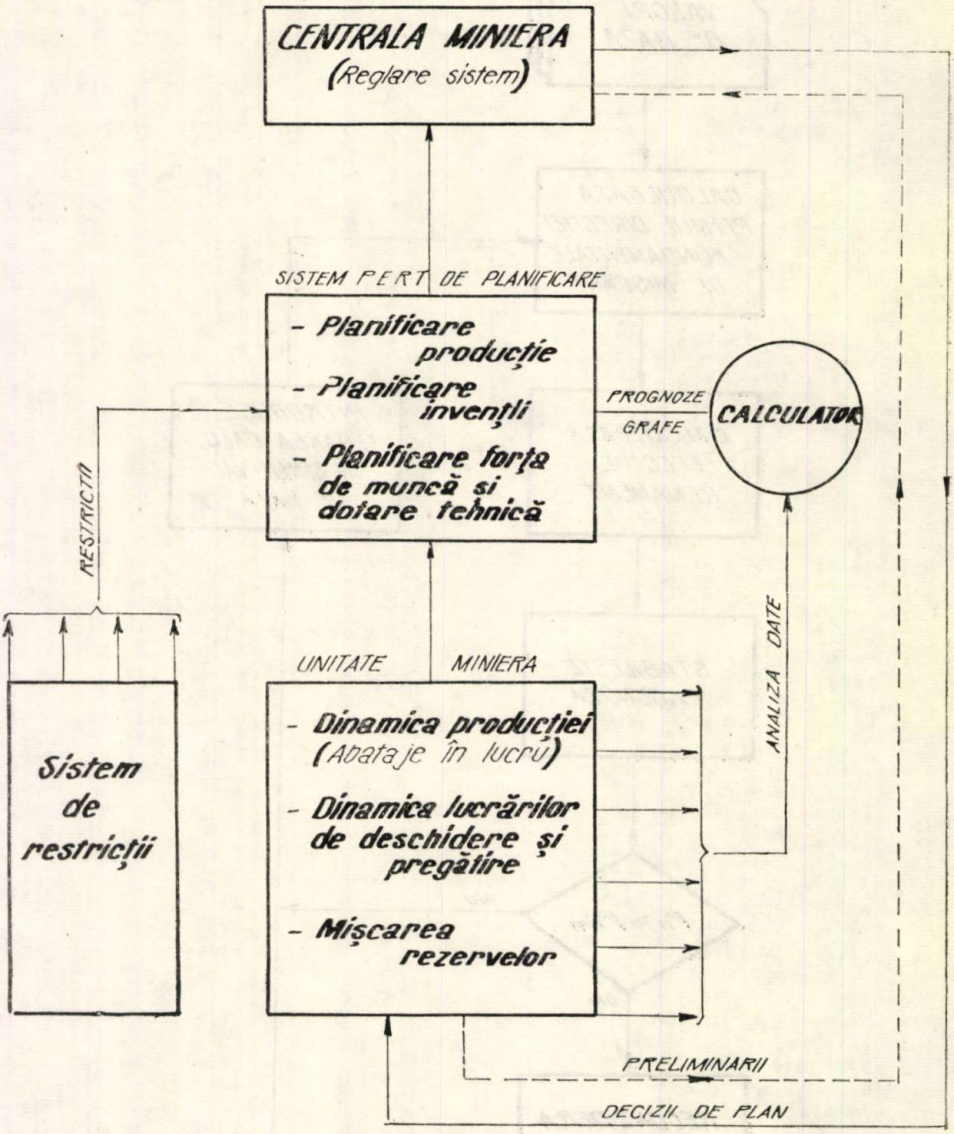


Fig. 2. Schema logică de calcul a prognozei dinamice.

metrii economici (număr de posturi, consum de materiale, consum de energie, prețul de cost la gura abatajului), este necesar a fi stabilită în strînsă corelație cu factorii care o influențează. Procedura utilizează metode cunoscute (teoria grafelor, programarea liniară, corelația și regresia multiplă), precum și modelul de creștere dinamică expus în prima parte.

Un astfel de model de prognoză dinamică, bazat pe existența unei regresii multiple între parametrul principal al procesului și factorii care-i determină dinamica, se poate trata în următoarele etape:

a) *Analiza procesului pentru o perioadă existentă și identificarea factorilor care influențează dinamica generală a procesului*

Tendința de a stabili de la început factorii de influență cu pondere mare (din punct de vedere intuitiv) poate duce la excluderea unor factori periferici, a căror influență asupra dinamicii fenomenului poate fi apreciabilă.

b) *Culegerea, verificarea și evaluarea cantitativă a parametrilor procesului pentru o perioadă trecută*

Eliminarea unor valori ale parametrilor trebuie să se facă numai în cazul în care se constată erori de înregistrare a acestora în evidența primară, dar nu și atunci cînd rezultatele sînt mult diferite de cele medii datorită unor deranjamente obiective în dinamica procesului. Corelația valorilor se impune în momentul apariției, în perioada destinată observării, a unor salturi calitative (schimbare de metodă de exploatare, introducere de mijloace de mecanizare și automatizare etc.), care duc la salturi valorice. Acest fapt determină fie reconsiderarea vechilor valori la situația creată, fie aplatizarea fenomenului tranzitoriu; o asemenea aplatizare depinde de abilitatea analistului de a elimina salturile valorice, salturi care pot imprima prognozei o dinamică deosebit de accentuată.

c) *Constituirea modelului matematic*

Printr-o analiză de corelație a rangurilor [5], utilizînd coeficienții de corelație Spearman și Kendall, din mulțimea factorilor posibili se selectează factorii semnificativi.

Semnificația coeficienților de corelație se verifică prin testul „Student" [5], criteriul de semnificație T verificîndu-se cu relația:

$$T = \frac{K}{\sqrt{1 - K^2}} n - c \qquad (4)$$

care urmează aproximativ legea de distribuție Student cu $f = n - c$ grade de libertate, K fiind coeficientul de corelație testat.

În funcție de valoarea tabelată a distribuției „Student" se obține pragul de semnificație q. Coeficientul de corelație poate fi considerat semnificativ pentru probabilitatea $p = 1 - q$. Un grad de intensitate a corelației acceptabil se poate considera pentru $p \geqslant 60\%$, sensul corelației fiind dat de semnul

coeficientului Spearman sau Kendall. Probabilitatea de semnificație a corelației poate indica forma regresiilor simple:

— liniare: $y = A + BX_i$, pentru: $K > 0$; $p \geqslant 85\%$;

— parabolice: $y = A + BX_i + CX_i^2$, pentru: $K > 0$; $60\% \leqslant p < 85\%$;

— hiperbolice: $y = A + \frac{B}{X_i}$; pentru: $K < 0$; $p \geqslant 60\%$.

Forma de regresie multiplă, obținută din reuniunea formelor simple de regresie, este ecuația generală a procesului, relația de dependență cantitativă dintre proces și factorii semnificativi care îl influențează. Determinarea coeficienților de regresie multiplă este posibilă prin metoda celor mai mici pătrate, metodă care urmărește minimizarea abaterilor pătratice ale valorilor calculate față de cele măsurate. Sistemul de ecuații obținut prin aplicarea metodei poate fi rezolvat atît prin metode clasice (Cramer, Gauss), cît și prin programarea liniară, care realizează în plus și o minimizare a abaterilor simple dintre valorile calculate și cele măsurate. Calculul zonei de regresie Z, care definește limitele de încredere pentru valorile estimate, se face cu ajutorul relației:

$$Z = T \sqrt{\frac{\Sigma(Y - y)^2}{n - c}} \tag{5}$$

unde:

T reprezintă coeficientul de semnificație care indică probabilitatea de acoperire a liniei de regresie de către ecuația de regresie stabilită în funcție de probabilitatea dată prin repartiția Student pentru un număr de grade de libertate infinite ale sistemului.

Ecuația de regresie devine astfel expresia matematică a procesului oglindind relația de dependență dintre proces și factorii de influență semnificativi:

$$Y = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \pm Z. \tag{6}$$

În acest mod, prognoza procesului pentru o etapă imediat următoare este determinată de prognoza dinamică a factorilor X_i, caz în care este posibilă o aplicare mai realistă a modelelor de creștere dinamică. Într-o acțiune de conducere previzională a procesului Y, avînd stabilită ecuația (6) se poate aplica modelul pentru prognoza factorilor X_i [4], valorile limită ale acestor factori pot rezulta fie din condiții obiective, fie din organizarea rațională a procesului (prin aplicarea teoriei grafelor), fie chiar din raționamentul decidentului în studiul de variante privind acordarea de valori factorilor X_i pentru o valoare dorită a lui Y.

d) *Programarea și prelucrarea automată a datelor*

Volumul mare de calcule impus de rezolvarea modelului matematic precum și caracterul repetitiv al acestora, datorat reactualizării frecvente a ecuației generale a procesului, necesită prelucrarea automată a datelor. Schema generală de prelucrare (fig. 3) cuprinde determinarea ecuației generale a pro-

cesului, prognoza factorilor de influenţă prin modelul prezentat în [4] şi prognoza propriu-zisă a procesului în funcţie de valorile acceptate ale factorilor de influenţă. Schema logică pentru faza de determinare a ecuaţiei generale a procesului (fig. 4), respectiv programul scris în limbaj FORTRAN, porneşte de la examinarea valorilor datelor luate în calcul (în program s-a prevăzut posibilitatea de aplicare pentru un număr de maximum 10 variabile); de asemenea, se pot determina rangurile valorilor în şir şi coeficienţii de corelaţie dintre parametrul dependent şi factorii de influenţă. Pentru probabilităţile de semnificaţie ($p < 60\%$) programul prevede eliminarea valorilor factorului X_i care se consideră nesemnificative. În funcţie de intensitatea şi semnul corelaţiilor se stabilesc formele ecuaţiilor simple de regresie şi, respectiv, forma ecuaţiei multiple de regresie, ai cărei coeficienţi sînt determinaţi, fie prin rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultat din aplicarea metodei c.m.m.p., fie printr-un algoritm Gauss pentru determinarea coeficienţilor de regresie prin metoda programării liniare.

Ecuaţia de regresie, precum şi zona de regresie, se verifică pe datele de bază; se face o nouă triere pentru valorile care introduc abateri mari faţă de o valoare limită stabilită; se calculează noua ecuaţie de regresie.

Programul conceput utilizează în continuare procedura I pentru prognoza factorilor de influenţă. Se stabilesc valorile finale ale acestora, valori ce sînt verificate şi corectate cu valorile admisibile date de analistul procesului. În final, se determină prognoza procesului pentru perioada dorită.

e) *Interpretarea rezultatelor şi implementarea noii proceduri*

Problema interpretării rezultatelor se referă la acceptarea valorii prognozate în funcţie de valorile obţinute prin dinamica factorilor de influenţă şi, eventual, prin intervenţia în program cu valori corectate ale acestora pentru obţinerea diverselor variante. Deoarece timpul de rulare este de ordinul a 3—15 minute, în funcţie de numărul parametrilor admişi în calcul prin verificările programului, problema conducerii previzionale a unui proces cu ajutorul calculatorului electronic apare deosebit de operativă. Desigur, ecuaţia procesului, stabilită pentru valorile iniţiale ale parametrilor, nu poate rămîne aceeaşi din moment ce corelaţia dintre parametri se schimbă prin apariţia unor noi valori rezultate din prognoză. Pentru o prognoză pe termen mijlociu (5—10 ani) este necesară reactualizarea ecuaţiei generale a procesului, stabilirea perioadelor de reconsiderare a valorilor de bază cu valorile nou calculate ce rezultă din experimentarea modelului pentru diverse situaţii.

Deşi modelele expuse sînt cunoscute, în general introducerea lor în practica curentă în industria minieră este dificilă, tocmai datorită volumului mare de calcule ce le necesită. Considerăm totuşi utilă introducerea modelelor expuse în cadrul sistemelor de conducere cu ajutorul calculatorului a proceselor de producţie, pentru faptul că aici, mai mult decît în oricare altă ramură a economiei naţionale, este necesar un control previzional al procesului, date fiind variabilitatea frecventă a factorilor care intervin şi a saltu-rilor calitative determinate de schimbarea condiţiilor de zăcămînt, de metodele de exploatare şi de tehnica folosită.

Cunoaşterea valorilor posibile viitoare ale fenomenului poate constitui o bază ştiinţifică decizională atît pentru practica generală de coordonare a proceselor, cît şi pentru deciziile operative de conducere a acestuia.

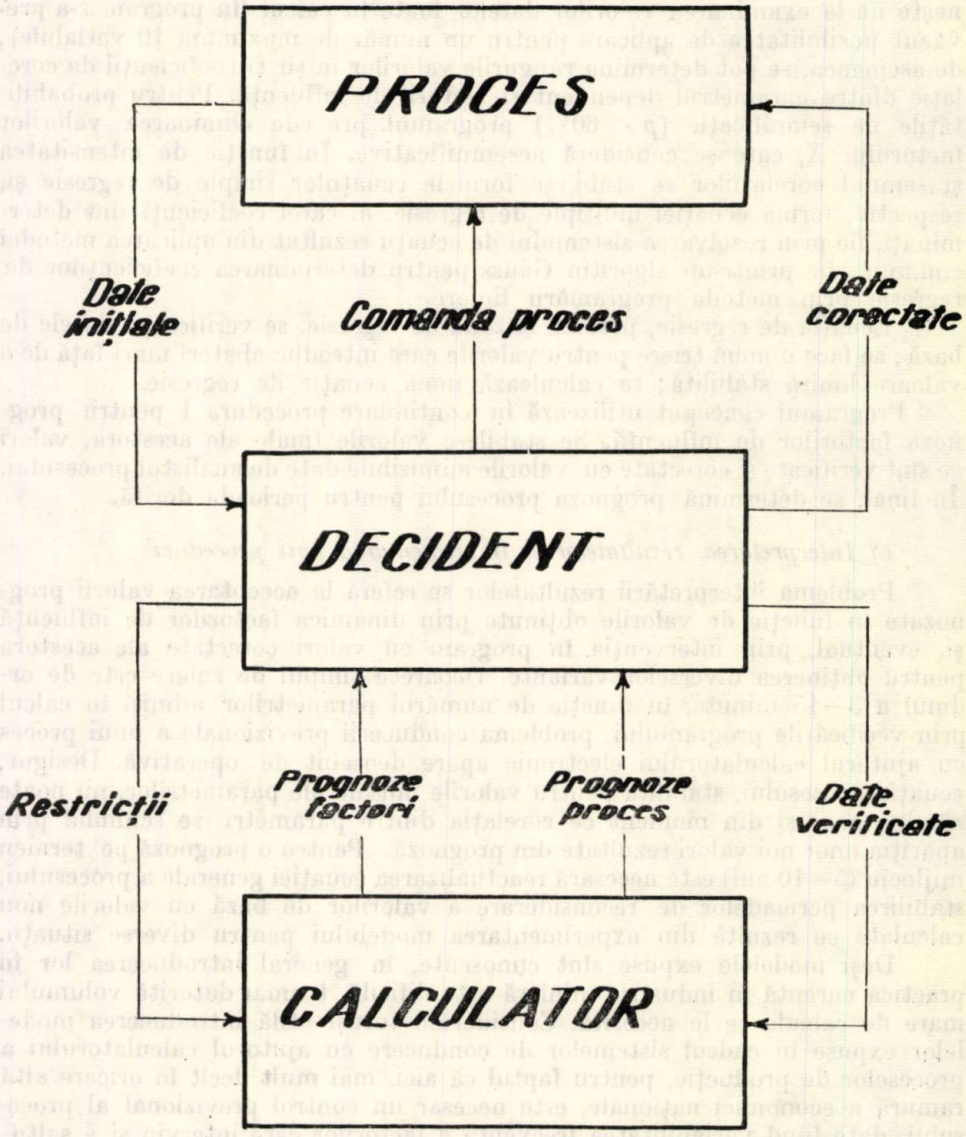


Fig. 3. Schema generală de conducere prin prognoză a unui proces.

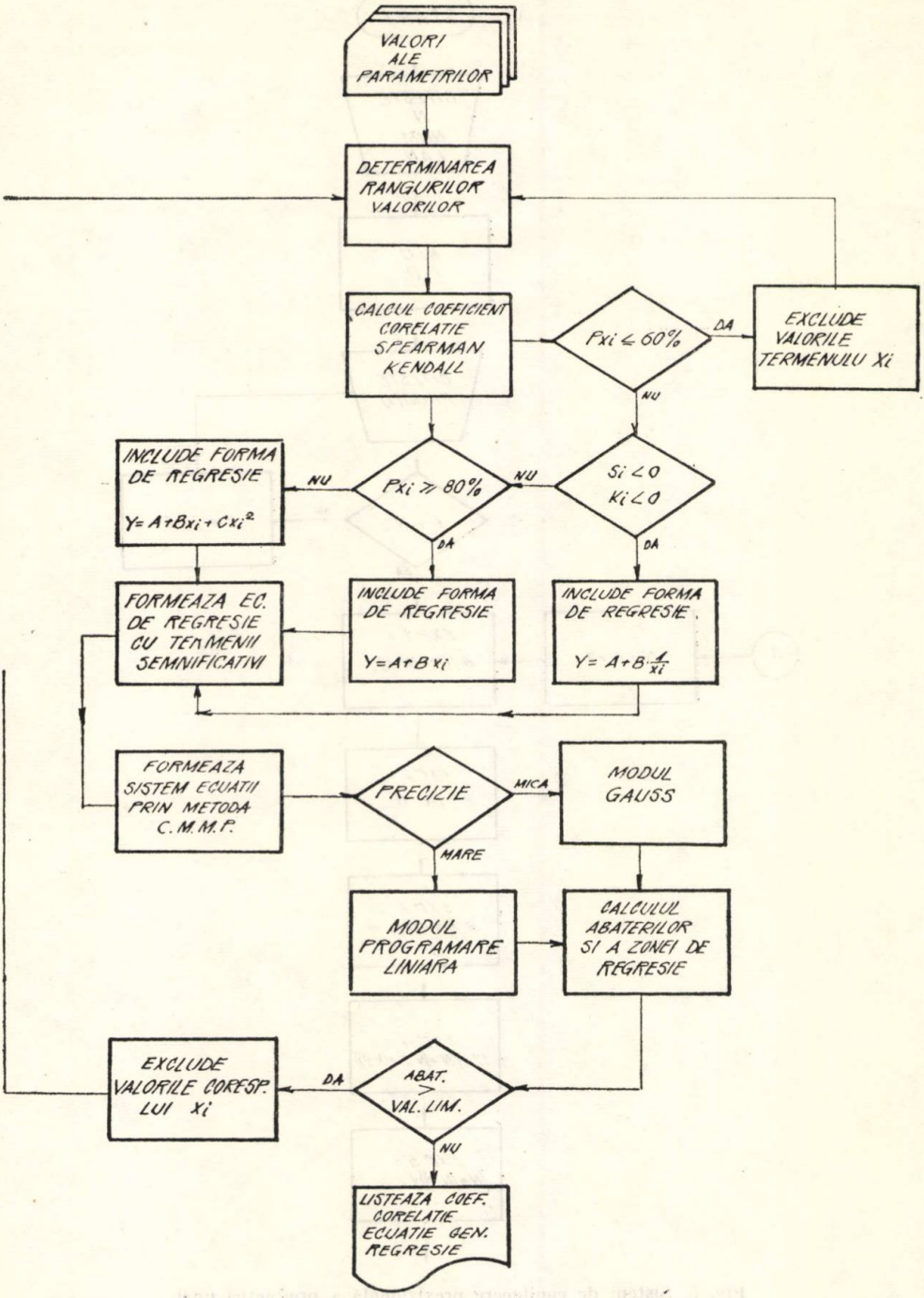


Fig. 4. Schema generală de calcul pentru determinarea corelaţiilor şi regresiilor multiple.

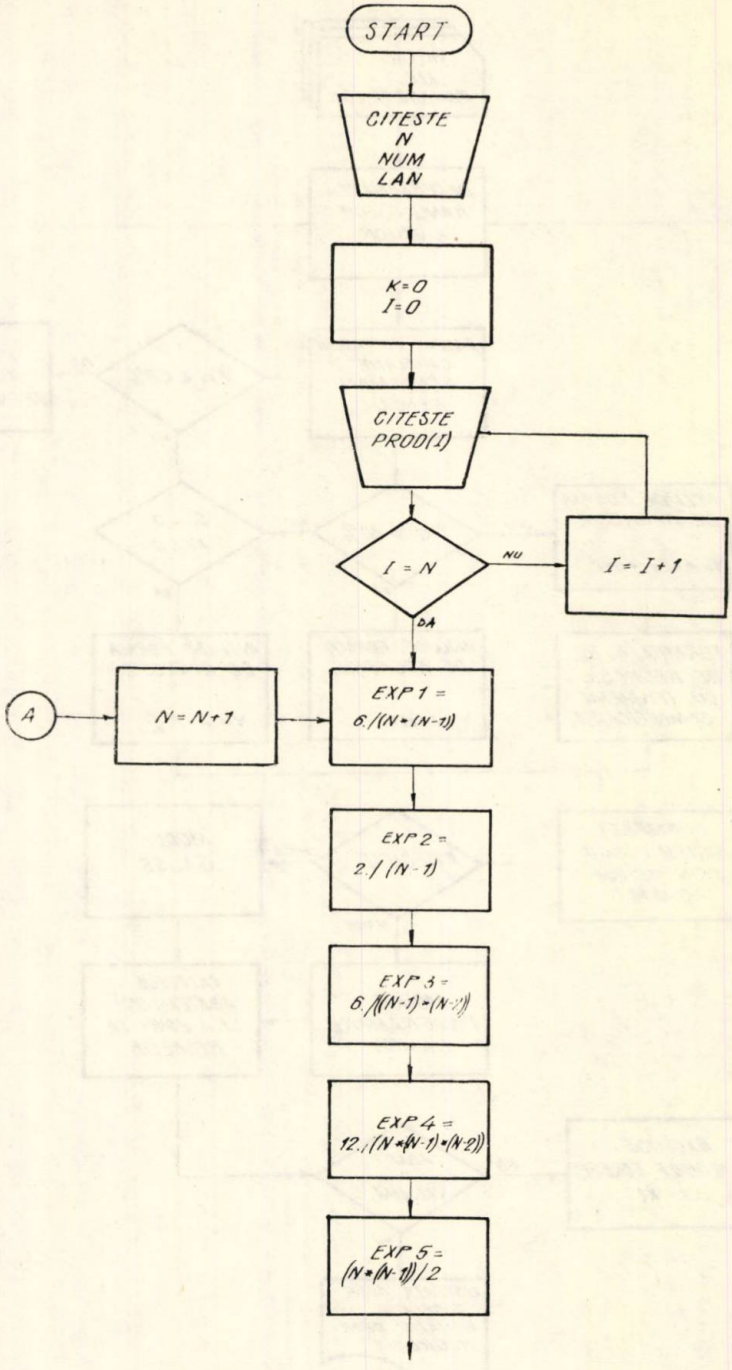
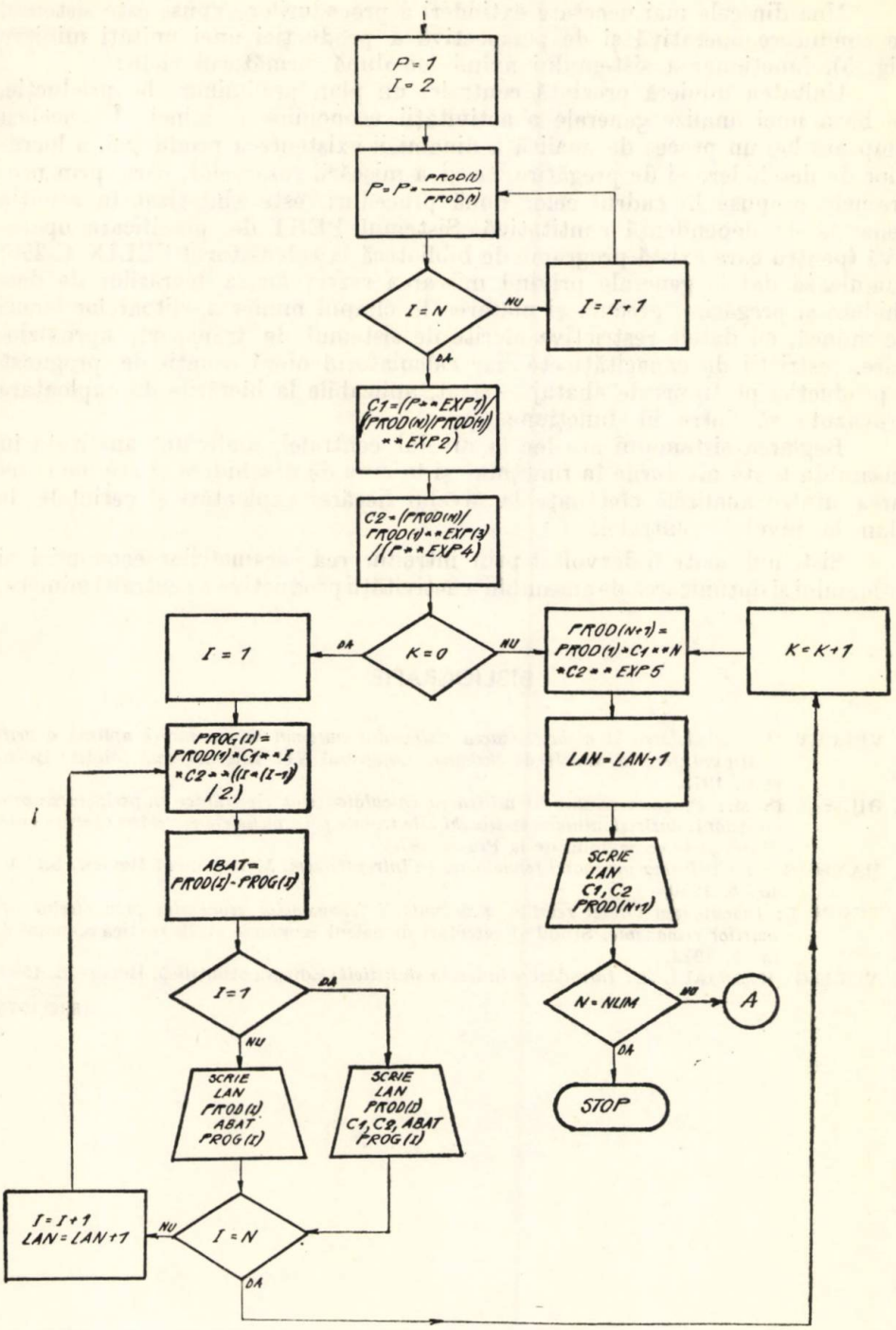


Fig. 5. Sistem de conducere previzională a producţiei unei unităţi miniere.


P = 1
I = 2
P = P * PROD(I) / PROD(N)
I = N
NU
I = I + 1
DA
C1 = (P ** EXP1) / (PROD(N)/PROD(I) ** EXP2)
C2 = (PROD(N)/PROD(I) ** EXP3) / (P ** EXP4)
K = 0
DA
NU
I = 1
PROD(N+1) = PROD(I) * C1 ** N * C2 ** EXP5
K = K + 1
PROG(I) = PROD(I) * C1 ** I * C2 ** ((I * (I-1)) / 2.)
LAN = LAN + 1
ABAT = PROD(I) - PROG(I)
SCRIE LAN C1, C2 PROD(N+1)
I = 1
DA
NU
N = NLIM
NU
A
DA
SCRIE LAN PROD(I) ABAT PROG(I)
SCRIE LAN PROD(I) C1, C2, ABAT PROG(I)
STOP
I = I + 1 LAN = LAN + 1
NU
I = N
DA

Una din cele mai necesare extinderi a procedurilor expuse este sistemul de conducere operativă și de perspectivă a producției unei unități miniere (fig. 5), funcționarea sistemului avînd loc după următorul ciclu:

Unitatea minieră prezintă centralei un plan preliminar de producție, pe baza unei analize generale a activității economice a minei. În același timp are loc un proces de analiză a dinamicii existente a producției, a lucrărilor de deschidere și de pregătire, ca și a mișcării rezervelor, care, prin programele propuse în cadrul celor două proceduri, este sintetizat în ecuația generală de dependență cantitativă. Sistemul PERT de planificare operativă (pentru care există programe de bibliotecă la calculatorul FELIX C-256) cumulează datele generale privind mișcarea rezervelor, a lucrărilor de deschidere și pregătire, precum și plasarea în cîmpul minier a viitoarelor locuri de muncă, cu datele restrictive oferite de sistemul de transport, aprovizionare, restricții de capacități etc., iar calculatorul oferă ecuații de prognoză a producției pe tipuri de abataj — strat, aplicabile la lucrările de exploatare prevăzute să intre în funcțiune.

Reglarea sistemului are loc la nivelul centralei, unde sînt analizate în ansamblu toate nivelurile în funcțiune și în curs de deschidere și are loc corelarea dintre analizele efectuate la nivelul fiecărei exploatări și cerințele de plan la nivelul centralei.

Sistemul poate fi dezvoltat prin introducerea parametrilor economici ai procesului și optimizarea de ansamblu a activității productive a centralei miniere.

BIBLIOGRAFIE

1. VELCEV M.: *Modelarea și algoritmizarea sistemului automat de conducere optimă a activității miniere la minele de cărbune.* Congresul VII Internațional Minier, București, 1972.
2. BILWACHS M.: *Progrese recente în utilizarea calculatoarelor electronice în prelucrarea problemelor industriei miniere, îndeosebi cele tratate prin metodele cercetării operaționale.* Materialele colocviului de la Praga, 1970.
3. HAYDEN S.: *Utilizarea prognozei tehnologice în întreprinderi.* Management Review, S.U.A., nr. 5, 1970.
4. TEICH I.: *Investigarea vitezei relative a dezvoltării fenomenelor economice prin efectul ritmurilor remanente.* Studii și cercetări de calcul economic și cibernetică economică, nr. 3, 1972.
5. YULE G., KENDALL M.: *Introducere în teoria statisticii.* Editura științifică, București, 1969.

15.02.1975

C. BARON
Catedra de cibernetică economică — A.S.E.

Disponibilitatea — indicator al calității produselor

Pornind de la necesitatea exprimării cît mai complexe a modului de manifestare a calității produselor în procesul exploatării lor, articolul prezintă conceptul de disponibilitate și legătura care există între acest concept și conceptele de fiabilitate și mentenabilitate.

De asemenea, ținînd seama de structura produselor (sistemelor), se calculează disponibilitatea sistemelor avînd structură de tip serie și de tip paralel, precum și cele cu structură mixtă. Deoarece în practică, sistemele cu structură mixtă au o răspîndire mai mare, se insistă mai mult asupra calculului disponibilității unor asemenea sisteme.

Este prezentată și o aplicație prin care se exemplifică una din metodele de calcul al disponibilității.

Din punct de vedere conceptual, calculul fiabilității unui sistem constituie o problemă relativ simplă. Metoda cea mai folosită implică efectuarea unor operații într-o ordine determinată [3]: 1) stabilirea stărilor posibile de evoluție a sistemului, 2) identificarea stărilor caracteristice (de bună funcționare a sistemului), 3) determinarea probabilității de producere a fiecărei stări caracteristice (de succes) și 4) adunarea acestor probabilități pentru a obține fiabilitatea sistemului.

În cazul sistemelor complexe (formate dintr-un număr mare de elemente), această metodă poate deveni impracticabilă din cauza numărului mare de stări care trebuie considerate. Pentru un sistem format din zece elemente acest număr este $2^{10} = 1024$ stări. Desigur, calculul fiabilității sistemului se poate face într-un timp foarte scurt cu ajutorul calculatorului electronic. Totuși unei dublări (o creștere moderată) a numărului de elemente îi corespunde o creștere impresionantă (de peste un milion) a numărului de stări, ceea ce înseamnă depășirea capacității de calcul a oricărui calculator electronic.

Calculul fiabilității sistemelor complexe poate fi considerabil simplificat prin folosirea unei metode de aproximare [3], [4], care, din punct de vedere conceptual, se bazează pe considerarea unui număr mult mai mic de stări, denumite ansambluri de întrerupere [2], [4], [6]. Aceste ansambluri reprezintă stările caracteristice ale sistemului și pot fi calculate relativ ușor cu ajutorul calculatorului electronic, folosind un algoritm care se bazează pe logica booleană [4], [6].

1. DISPONIBILITATEA SISTEMELOR

Funcționarea oricărui produs (reparabil) în perioada de exploatare (normală) poate fi reprezentată (fig. 1) prin alternanța stărilor de bună funcționare cu cele de defectare.

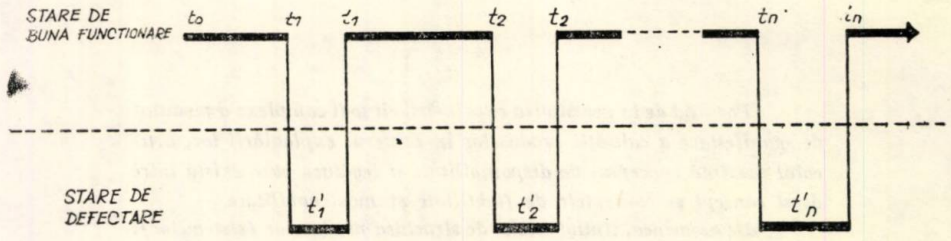


Fig. 1

Folosind intervalele de timp de bună funcționare (t_i) și respectiv de defectare (t_i') se pot calcula cei doi indicatori de bază care caracterizează calitatea tuturor produselor reparabile:

$$\bar{t} = MTBF = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}, \tag{1}$$

unde:

— $\bar{t}$ este timpul mediu de bună funcționare;
— $MTBF$ este Media Timpilor de Bună Funcționare; respectiv:

$$\bar{t}' = MTR = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i'}{n}, \tag{2}$$

unde

— $\bar{t}'$ este timpul mediu de reparare;
— MTR este Media Timpilor de Reparare.

În unele cazuri, fiind mai comodă folosirea inversului acestor indicatori, se obțin cei doi parametri cunoscuți:

$$\lambda = \frac{1}{MTBF}, \tag{3}$$

adică intensitatea (rata) defectărilor — λ și respectiv

$$\mu = \frac{1}{MTR}, \tag{4}$$

adică intensitatea (rata) reparațiilor — μ.

Între $MTBF$ și MTR, precum și între λ și μ există o relație bine definită ce caracterizează măsura în care sistemul poate fi folosit (atunci cînd este necesar). Această relație este pusă în evidență de expresiile:

$$D = \frac{MTBF}{MTBF + MTR}, \tag{5}$$

și respectiv:

$$D = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \tag{6}$$

unde D este coeficientul de disponibilitate.

Analizînd funcționarea unui produs (sistem) potrivit graficului din fig. 1 și ținînd seama de expresiile (5) și (6) se observă că disponibilitatea sistemului este rezultatul a două evenimente [5]: „fiabilitate" și „mentenabilitate".

Notînd cu $P(A)$ probabilitatea realizării a cel puțin unul din cele două evenimente, adică probabilitatea ca sistemul să fie în stare de bună funcționare la un momentul dat se obține expresia:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2), \tag{7}$$

unde A_1 este evenimentul de bună funcționare, iar A_2 este evenimentul de reparare.

Evenimentele A_1 și A_2 fiind independente și știind că $A_1 \cap A_2 \neq 0$ se poate scrie:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2); \tag{8}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2). \tag{9}$$

din care se obține

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2), \tag{10}$$

sau

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + (1 - P(A_1))\, P(A_2). \tag{11}$$

Înlocuind:

$P(A_1 \cup A_2) = D$ — Disponibilitatea
$P(A_1) = R$ — Fiabilitatea
$P(A_2) = M$ — Mentenabilitatea

se obține:

$$D = R + (1 - R)M. \tag{12}$$

Dacă D, R și M depind de timp, atunci expresia (12) devine:

$$D(t) = R(t) + [1 - R(t)]M(t'). \tag{13}$$

Din expresiile (12) și (13) se poate deduce că disponibilitatea unui sistem este determinată de două probabilități:

a) probabilitatea ca sistemul să funcționeze fără defectare pe o perioadă de timp t (fiabilitatea);

b) probabilitatea ca sistemul, care se defectează în perioada t să fie repus în funcțiune în perioada de timp t' (mentenabilitatea).

Expresiile (12) și (13) au o deosebită importanță practică deoarece scot în evidență legătura dintre disponibilitate, fiabilitate și mentenabilitate. Astfel, în cazul cînd un sistem are o fiabilitate mai scăzută, disponibilitatea acestuia poate fi ridicată printr-o creștere corespunzătoare a mentenabilității, adică prin aplicarea unei politici adecvate de întreținere (mentenanță) a sistemului. De asemenea, pe baza acestor expresii se pot construi așa-zise curbe de izodisponibilitate (fig. 2), cu ajutorul cărora se poate determina cu ușurință raportul de mărime dintre fiabilitate și mentenabilitate, în scopul obținerii unui anumit nivel al disponibilității.

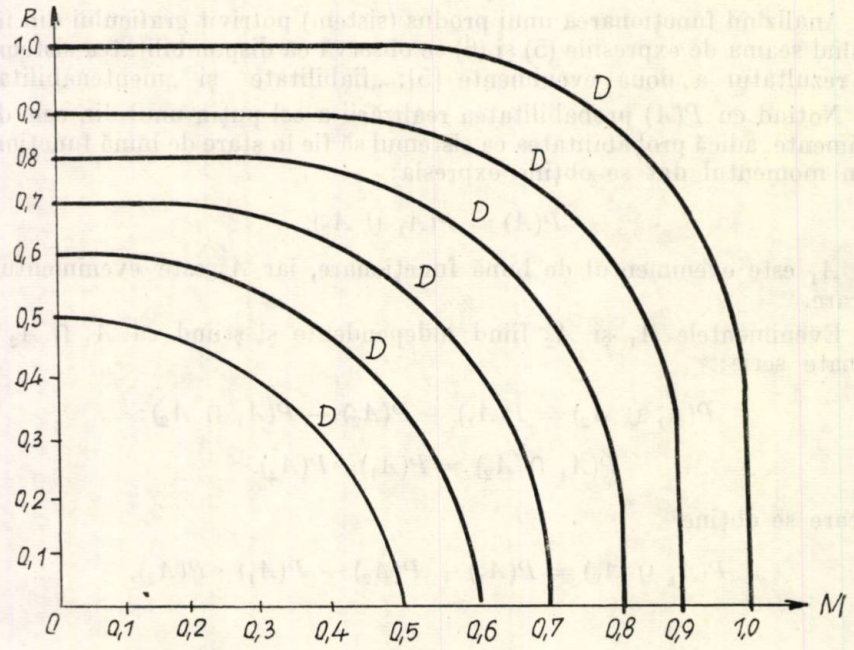


Fig. 2

Se poate afirma că disponibilitatea constituie forma cea mai complexă de manifestare a calității produselor în procesul exploatării lor întrucît cuprinde atît fiabilitatea, cît și mentenabilitatea lor [5].

2. CALCULUL DISPONIBILITĂȚII SISTEMELOR CU STRUCTURĂ DE TIP SERIE

Fie un sistem format din n elemente e_i, $i = 1,2, ..., n$. Se spune că structura sistemului este de tip serie dacă cele n elemente ale sale sînt legate astfel, încît indisponibilitatea (defectarea) unui element determină indisponibilitatea întregului sistem, adică:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i, \tag{14}$$

unde:

— x_i este variabila de stare asociată elementului e_i, astfel încît $x_i = 1$ (dacă elementul e_i este în stare de funcționare) sau 0 (dacă elementul e_i este defect);

— $f(x)$ este funcția de structură [2], [6] a sistemului, astfel încît $f(x) = 1$ (dacă sistemul este în stare de funcționare) sau 0 (dacă sistemul este defect).

Considerînd că defectările elementelor sînt evenimente independente și ținînd seama de expresia (14), disponibilitatea unui sistem cu structură de tip serie se calculează cu expresia:

$$D(t) = \prod_{i=1}^{n} d_i(t), \tag{15}$$

unde:

— $d_i(t)$ este disponibilitatea elementului e_i pentru un anumit timp t;

— $D(t)$ este disponibilitatea sistemului în același timp t.

Deoarece $0 \leqslant d_i(t) \leqslant 1$, și ținînd seama de expresia (15) rezultă că disponibilitatea unui sistem cu structură de tip serie este mai mică decît disponibilitatea oricărui element și se micșorează pe măsură ce numărul de elemente crește.

În cazul cînd elementele sistemului au aceeași disponibilitate $d(t)$ rezultă că disponibilitatea sistemului este dată de expresia:

$$D(t) = d^n(t). \tag{16}$$

3. CALCULUL DISPONIBILITĂȚII SISTEMELOR CU STRUCTURĂ DE TIP PARALEL

Fie un sistem format din n elemente e_i, $i = 1,2, ..., n$. Se spune că structura sistemului este de tip paralel dacă cele n elemente ale sale sînt legate astfel, încît indisponibilitatea (defectarea) unuia dintre elemente nu determină indisponibilitatea întregului sistem, adică:

$$f(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i), \tag{17}$$

unde:

— x_i și $f(x)$ au aceeași semnificație ca în cazul expresiei (14);

— $(1 - x_i)$ este starea contrară lui x_i.

Considerînd că defectările elementelor sînt evenimente independente și ținînd seama de expresia (17), disponibilitatea unui sistem cu structura de tip paralel se calculează cu expresia:

$$D(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - d_i(t)], \tag{18}$$

unde:

— $d_i(t)$ și $D(t)$ au aceeași semnificație ca și în expresia (15);

— $[1 - d_i(t)]$ este indisponibilitatea elementului e_i, adică probabilitatea lui de defectare în timpul t.

Deoarece $0 \leqslant [1 - d_i(t)] \leqslant 1$ și ținînd seama de expresia (18) rezultă că disponibilitatea unui sistem cu structură de tip paralel este mai mare decît disponibilitatea oricărui element și se mărește pe măsură ce numărul de elemente crește.

Dacă elementele sistemului au aceeași disponibilitate $d(t)$ rezultă că disponibilitatea sistemului este dată de expresia:

$$D(t) = 1 - [1 - d_i(t)]^n. \tag{19}$$

4. CALCULUL DISPONIBILITĂȚII SISTEMELOR CU STRUCTURĂ MIXTĂ

Fie un sistem definit de ansamblul său de elemente $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, de cele k subansambluri minimale de legătură a_j și de cele k subansambluri minimale de întrerupere b_j, $j = 1, 2, ..., k$ [2], [4], [6]. Se spune că structura sistemului este mixtă adică sistemul are unele elemente legate în serie, iar altele legate în paralel, dacă cel puțin unul din cele k subansambluri minimale de legătură are toate elementele în stare de funcționare, sau dacă toate cele k subansambluri minimale de întrerupere au toate elementele în stare de funcționare, adică:

$$f(x) = 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \prod_{\substack{i \\ \in a_j}} x_i) \tag{20}$$

sau:

$$f(x) = \prod_{j=1}^{k} [1 - \prod_{\substack{i \\ e_i \in b_j}} (1 - x_i)], \tag{21}$$

în care: x_i, $(1 - x_i)$ și $f(x)$ au aceeași semnificație ca în expresiile (14) și (17).

Disponibilitatea sistemelor cu structură mixtă se poate calcula atît pe baza subansamblurilor minimale de legătură, cît și pe baza subansamblurilor minimale de întrerupere.

De altfel, expresia (20) este o dezvoltare a expresiei (17), iar expresia (21) este o extindere a expresiei (14), adică expresia (20) reflectă structura unui sistem format din k subansambluri minimale de legătură conectate în paralel, iar expresia (21) reflectă structura unui sistem format din k subansambluri minimale de întrerupere legate în serie.

Metoda probabilităților totale. Din expresia (20) se observă că, dacă $x_i = 1$ pentru oricare $e_i \in a_j$, atunci $\prod\limits_{\substack{i \\ e_i \in a_j}} x_i = 1$ și $\prod\limits_{j=1}^{k} (1 - \prod\limits_{e_i \in a_j} x_i) = 0$, iar $f(x) = 1$.

Deci, dacă se notează cu A_j evenimentul în care toate elementele subansamblului minimal de legătură a_j sînt disponibile (în stare de funcționare) în intervalul de timp t, atunci disponibilitatea sistemului se poate exprima astfel:

$$D(t) \equiv P\{A_1 + A_2 + \ldots + A_k\} \tag{22}$$

$D(t) = P$ { cel puțin un subansamblu minimal de legătură să fie bun} .

În mod analog, dacă se notează cu $\bar{A}_j$ evenimentul complementar lui A_j, atunci disponibilitatea sistemului se poate exprima astfel:

$$1 - D(t) \equiv P\{\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_k\} \tag{23}$$

$1 - D(t) = P$ {toate subansamblurile minimale de legătură să fie defecte} .

De asemenea, din (21) se observă că, dacă $x_i = 1$ pentru oricare $e_i \in b_j$, atunci $\prod\limits_{\substack{i \\ e_i \in b_j}} (1 - x_i) = 0$ și $1 - \prod\limits_{\substack{i \\ e_i \in b_j}} (1 - x_i) = 1$, iar $f(x) = 1$.

Așa dar, dacă se notează cu B_j evenimentul în care toate elementele subansamblului minimal de întrerupere b_j sînt disponibile (în stare de funcționare) în intervalul de timp t, atunci disponibilitatea sistemului se poate exprima astfel:

$$D(t) \equiv P\{B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_k\} \tag{24}$$

$D(t) = P$ {toate subansamblurile minimale de întrerupere să fie bune}.

La fel, dacă se notează cu $\bar{B}_j$ evenimentul complementar lui B_j, atunci disponibilitatea sistemului se poate exprima astfel:

$$1 - D(t) \equiv P\{\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \ldots + \bar{B}_k\} \tag{25}$$

$1 - D(t) = P$ {cel puțin un subansamblu minimal de întrerupere să fie defect}.

Dezvoltînd, în continuare, expresiile (22) și (25) după regula probabilităților totale, se obțin expresiile:

$$D(t) = \sum_{j=1}^{k} P\{A_j\} - \sum_{j \neq m}^{k} P\{A_j A_m\} + \ldots + (-1)^{k-1} P\{A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k\}, \tag{26}$$

$$D(t) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P\{\bar{B}_j\} + \sum_{j \neq m}^{k} P\{\bar{B}_j \bar{B}_m\} + \ldots + \\ + (-1)^{k-1} P\{\bar{B}_1 \bar{B}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{B}_k\}. \quad (27)$$

În expresiile (26) și (27) fiecare probabilitate este de forma:

$$P\{A_{r_1} A_{r_2} \cdot \ldots \cdot A_{r_s}\} = d_{s_1}(t)\, d_{s_2}(t) \cdot \ldots \cdot d_{s_r}(t), \quad (28)$$

(unde $s_1, s_2, \ldots, s_r$ sînt numerele tuturor elementelor care fac parte din subansamblurile de legătură $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_k}$), respectiv de forma:

$$P\{\bar{B}_{r_1} \bar{B}_{r_2} \cdot \ldots \cdot \bar{B}_{r_s}\} = q_{s_1}(t)\, q_{s_2}(t) \cdot \ldots \cdot q_{s_r}(t), \quad (29)$$

(unde $s_1, s_2, \ldots, s_r$ sînt numerele tuturor elementelor care fac parte din subansamblurile de întrerupere $b_{r_1}, b_{r_2}, \ldots, b_{r_k}$), iar $d(t)$ este disponibilitatea unui element în intervalul de timp t și $q(t) = 1 - d(t)$.

Analizînd expresiile (26) și (27) se observă că, din cauza alternanței semnelor, evoluția mărimii disponibilității sistemului are un caracter oscilatoriu. Amplitudinea oscilației depinde în raport direct proporțional de $P\{\ \}$ și de k. Astfel, în cazul expresiei (26) această amplitudine este foarte mare datorită faptului că $P\{\ \}$ reprezintă produsul dintre disponibilitățile elementelor unui subansamblu de legătură. Dimpotrivă, în cazul expresiei (27) această amplitudine este foarte mică deoarece $P\{\ \}$ reprezintă produsul dintre indisponibilitățile elementelor unui subansamblu de întrerupere. Pe de altă parte, comparînd cele două amplitudini se observă că, atunci cînd se folosește expresia (26), numărul termenilor luați în calcul pentru a atinge o anumită mărime a disponibilității sistemului este mai mare față de folosirea expresiei (27). Această constatare are o deosebită importanță practică deoarece folosirea expresiei (27) este mai avantajoasă pentru calculul disponibilității unui sistem în comparație cu folosirea expresiei (26).

Metoda de aproximare a disponibilității. Expresiile (26) și (27) permit calculul disponibilității sistemelor cu structură mixtă, dar pot fi folosite și în cazul sistemelor cu structură de tip serie sau de tip paralel, așa că aplicabilitatea lor este generală. Totuși, atunci cînd k este mare folosirea lor este dificilă datorită faptului că numărul termenilor implicați în calcul este de $2^k - 1$ pentru expresia (26), respectiv 2^k pentru expresia (27).

Pentru simplificarea calculelor se poate recurge la aproximare [4], adică la determinarea disponibilității sistemului fără a folosi toți termenii expresiilor (26) sau (27). Această simplificare se bazează pe faptul că, atunci cînd k este mare, după însumarea primilor termeni, oscilația mărimii disponibilității își micșorează mult amplitudinea, astfel încît, de la un anumit moment al calculului rezultatul obținut este suficient de precis pentru a fi folosit ca disponibilitate a sistemului. Pe de altă parte, aproximarea rezultatului este cu atît mai bună, cu cît disponibilitatea elementelor sistemului este mai aproape de unitate. Deoarece acesta este cazul cel mai des întîlnit în practică, rezultă că erorile de calcul generate de această metodă sînt neglijabile.

Folosirea acestei metode de aproximare implică reconsiderarea dezvoltării expresiilor (22) și (25).

Astfel, din dezvoltarea completă a acestor două expresii se menţin numai primii termeni, rezultînd expresiile:

$$D(t) = \sum_{j=1}^{k} P\{A_j\} - \sum_{j \neq m}^{k} P\{A_j A_m\} + \ldots \tag{30}$$

$$D(t) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P\{\bar{B}_j\} + \sum_{j \neq m}^{k} P\{\bar{B}_j \bar{B}_m\} - \ldots \tag{31}$$

Caracterul oscilatoriu al mărimii disponibilităţii unui sistem, calculată cu expresia (30) sau cu expresia (31), face ca de fapt disponibilitatea sistemului să se găsească între două limite (fig. 3).

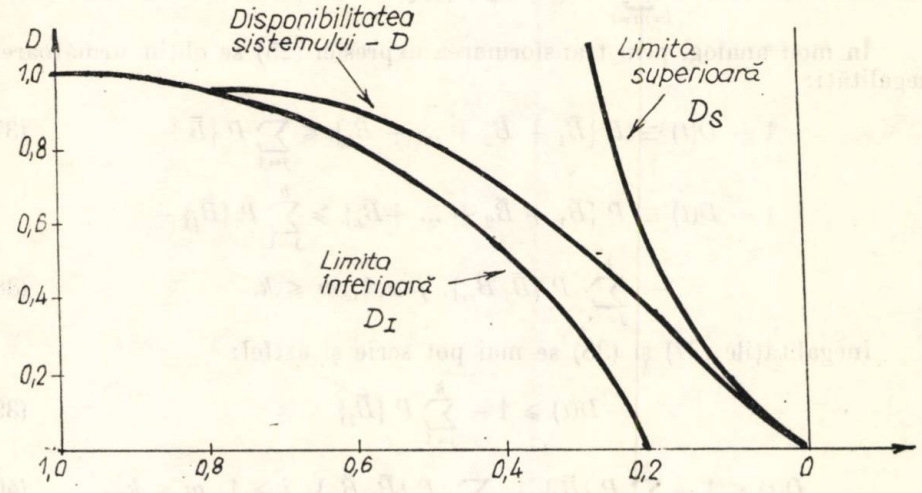


Fig. 3

Aceste două limite ale disponibilităţii sistemului se pot obţine prin transformarea expresiilor (22) şi (25) în inegalităţi probabilistice. Astfel, plecînd de la expresia (22) se obţin următoarele inegalităţi:

$$D(t) \equiv P\{A_1 + A_2 + \ldots + A_k\} \leqslant \sum_{j=1}^{k} P\{A_j\} \tag{32}$$

$$D(t) \equiv P\{A_1 + A_2 + \ldots + A_k\} \geqslant \sum_{j=1}^{k} P\{A_j\} - \sum_{j \neq m}^{k} P\{A_j A_m\}, \quad j \geqslant 1, \quad m \leqslant k. \tag{33}$$

Din inegalitatea (32) rezultă prima limită a disponibilităţii, care constituie o limită superioară:

$$D_{s1}(t) \equiv \sum_{j=1}^{k} P\{A_j\}, \tag{34}$$

iar din inegalitatea (33) rezultă prima limită inferioară a disponibilității:

$$D_{I1}(t) \equiv \sum_{j=1}^{k} P\{A_j\} - \sum_{j \neq m}^{k} P\{A_j\, A_m\}. \tag{35}$$

Deoarece de regulă $\sum_{j=1}^{k} P\{A_j\} > 1$, $D_{s1}(t)$ nu poate fi disponibilitatea sistemului, se continuă calculul pentru găsirea unei alte limite superioare adică:

$$D_{s2}(t) \equiv \sum_{j=1}^{k} P\{A_j\} - \sum_{j \neq m}^{k} P\{A_j\, A_m\} + \sum_{j \neq m \neq r}^{k} P\{A_j\, A_m\, A_r\},\ j \geqslant 1,\ m,\ r \leqslant k. \tag{36}$$

În mod analog, prin transformarea expresiei (25) se obțin următoarele inegalități:

$$1 - D(t) \equiv P\{\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \ldots + \bar{B}_k\} \leqslant \sum_{j=1}^{k} P\{\bar{B}_j\} \tag{37}$$

$$1 - D(t) \equiv P\{\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \ldots + \bar{B}_k\} \geqslant \sum_{j=1}^{k} P\{\bar{B}_j\} - \sum_{j \neq m}^{k} P\{\bar{B}_j\, \bar{B}_m\},\ j \geqslant 1,\ m \leqslant k. \tag{38}$$

Inegalitățile (37) și (38) se mai pot scrie și astfel:

$$D(t) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{k} P\{\bar{B}_j\} \tag{39}$$

$$D(t) \leqslant 1 - \sum_{j=1}^{k} P\{\bar{B}_j\} + \sum_{j \neq m}^{k} P\{\bar{B}_j\, \bar{B}_m\},\ j \geqslant 1,\ m \leqslant k. \tag{40}$$

Ținînd seama de deosebirile dintre conceptul care stă la baza expresiei (22) și cel pe care se bazează expresia (25) rezultă că, din inegalitățile (39) și (40), se obțin alte limite decît limitele D_{s1}, D_{I1} și D_{s2}. Astfel, din inegalitatea (39) se obține limita inferioară:

$$D_{I2}(t) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P\{\bar{B}_j\}. \tag{41}$$

În același mod, din inegalitatea (40) se obține limita superioară:

$$D_{s3}(t) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P\{\bar{B}_j\} + \sum_{j \neq m}^{k} P\{\bar{B}_j\, \bar{B}_m\},\ j \geqslant 1,\ m \leqslant k. \tag{42}$$

Analizînd modul de calcul al limitelor disponibilității unui sistem, se observă că o limită inferioară corespunde scăderii unui termen din valoarea anterioară a expresiei respective, iar o limită superioară rezultă în urma adunării unui termen la valoarea anterioară a expresiei respective. De asemenea, semnele de relație ale inegalităților care se bazează pe expresia (22) sînt inverse față de cele ale inegalităților care provin din transformarea expresiei (25).

Această inversare se explică prin faptul că, limitele disponibilității, bazate pe subansamblurile de legătură sînt cele mai bune în regiunea cu o disponibilitate scăzută, iar cele bazate pe subansamblurile de întrerupere sînt cele mai bune în regiunea cu o disponibilitate înaltă [4].

Pentru aproximarea cu o anumită precizie a disponibilității sistemului este necesar ca după calculul fiecărei limite să se efectueze un test de convergență în probabilitate. Astfel, dacă $|L_i - L_{i-1}| - \varepsilon \leqslant 0$ (unde L_i și L_{i-1} sînt două limite de disponibilitate consecutive, iar ε este un număr dat, astfel încît $0 < \varepsilon < 1$), atunci L_i (ultima limită) constituie disponibilitatea căutată și, ca atare, calculul ia sfîrșit.

Cu toate că se poate folosi atît expresia (30) cît și (31), numărul termenilor luați în calcul pentru a atinge o anumită precizie a disponibilității este mai mic în cazul folosirii expresiei (31). Aceasta se explică prin faptul că termenii acestei expresii au o valoare mai mică în comparație cu aceea a termenilor expresiei (30).

Aplicație. Prezentăm un exemplu de folosire a metodei de aproximare pentru calculul disponibilității unui sistem cu structură mixtă. Pentru rezolvarea acestei aplicații la calculatorul electronic a fost folosit un program conceput în limbajul FORTRAN. Calculul disponibilității sistemului s-a efectuat pe baza expresiei (31). Ca atare pe lîngă disponibilitățile elementelor au fost folosite ca date de intrare, subansamblurile minimale de întrerupere [4], [6] introduse sub forma unei matrice booleane. Datele de ieșire reprezintă disponibilitățile elementelor, limitele (inferioare și superioare) ale disponibilității și disponibilitatea sistemului, calculată prin convergența acestor limite în funcție de un ε dat.

Sistemul este format din 12 elemente avînd structura din figura 4.

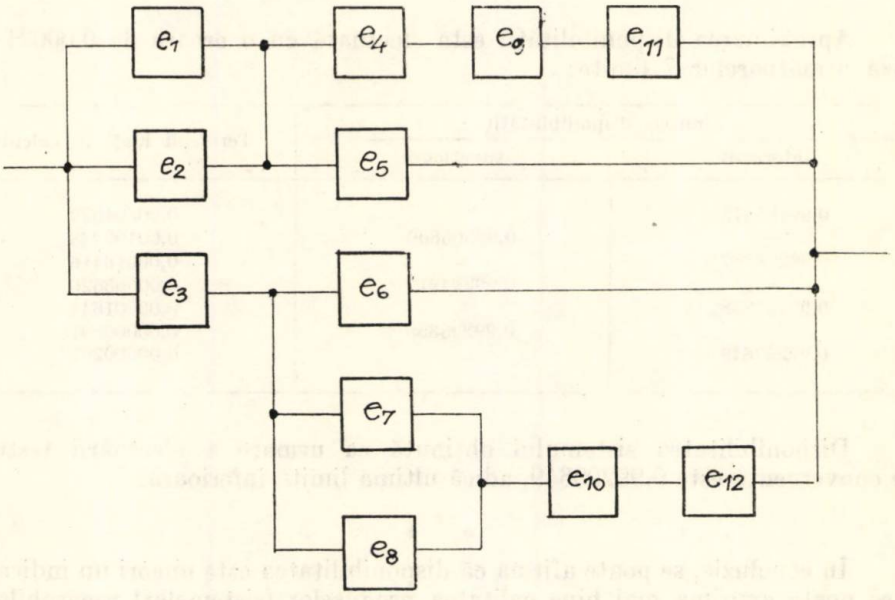


Fig. 4

Disponibilităţile elementelor sînt următoarele:

Elementul	Disponibilitatea	Elementul	Disponibilitatea
e_1	0,82	e_7	0,78
e_2	0,88	e_8	0,85
e_3	0,95	e_9	0,96
e_4	0,76	e_{10}	0,94
e_5	0,79	e_{11}	0,91
e_6	0,81	e_{12}	0,93

Calculul disponibilităţii sistemului se bazează pe următoarele 16 subansambluri minimale de întrerupere:

Subansamblul	Elementele componente	Subansamblul	Elementele componente
b_1	$e_1e_2e_3$	b_9	$e_5e_6e_9e_{10}$
b_2	$e_3e_4e_5$	b_{10}	$e_5e_6e_9e_{12}$
b_3	$e_3e_5e_9$	b_{11}	$e_5e_6e_{10}e_{11}$
b_4	$e_3e_5e_{11}$	b_{12}	$e_5e_6e_{11}e_{12}$
b_5	$e_1e_2e_6e_{10}$	b_{13}	$e_1e_2e_6e_7e_8$
b_6	$e_1e_2e_6e_{12}$	b_{14}	$e_4e_5e_6e_7e_8$
b_7	$e_4e_5e_6e_{10}$	b_{15}	$e_5e_6e_7e_8e_9$
b_8	$e_4e_5e_6e_{12}$	b_{16}	$e_5e_6e_7e_8e_{11}$

Aproximarea disponibilităţii este efectuată cu o eroare de 0,00001 pe baza următoarelor 7 limite:

Limitele disponibilităţii		Termenii luaţi în calcul
inferioare	superioare	
0,99195975	—	0,00804029
—	0,99305809	0,00109838
0,99289387	—	0,00016416
—	0,99294913	0,00005526
0,99293268	—	0,00001644
—	0,99293858	0,00000591
0,99293649	—	0,00000207

Disponibilitatea sistemului obţinută ca urmare a efectuării testului de convergenţă este 0,99293649, adică ultima limită inferioară.

* * *

În concluzie, se poate afirma că disponibilitatea este uneori un indicator care poate exprima mai bine calitatea produselor (sistemelor) reparabile în comparaţie cu fiabilitatea. De asemenea, ca şi fiabilitatea, disponibilitatea

sistemelor se poate calcula pe baza disponibilității elementelor componente. Dacă în cazul sistemelor cu structură de tip serie sau de tip paralel calculul disponibilității nu ridică probleme deosebite, în schimb în cazul sistemelor cu structură mixtă (cea mai des întîlnită) acest calcul poate deveni uneori imposibil datorită volumului de calcule deosebit de mare. Prin folosirea unor metode de calcul adecvate (așa cum s-a specificat în acest articol) acest calcul poate fi totuși relativ simplu.

BIBLIOGRAFIE

1. GNEDENKO, B., BELIAEV, Y., SOLOVIEV, A.,: *Méthodes mathématiques en théorie de la fiabilité.* Ed. MIR, Moscova, 1972.
2. KAUFMANN A., GROUCHKO, D., CRUON R.: *Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes.* Masson et CIE Editeurs. Paris, 1975.
3. JENSEN, P. A., BELLMORE, M.: *An algorithm to determine the reliability of a complex system.* IEEE Transaction on Reliability vol. R—18, Nr. 4, nov. 1969.
4. NELSON, A. C., BATTS, J. R., BEADLES, R. L.: *A Computer program for approximating system reliability.* IEEE Transaction on Reliability, vol. R—19, nr. 2, mai 1970.
5. BARON, T.: *Calitatea și fiabilitatea produselor.* E.D.P., București, 1976.
6. BARON, C.: *Funcții de structură și rețele de fiabilitate.* Studii și cercetări de calcul economic și cibernetică economică, nr. 1, 1977.

22.02.1977

J. Lifermann

LES SYSTEMES DISCRETS

(Sisteme discrete)

Masson et Cie éditeurs, Paris, 1975, 170 p.

Teoria modernă a sistemelor, postulează că funcţionarea tuturor sistemelor este legată de trei feluri de variabile: de intrare, de ieşire şi de stare.

Atunci cînd aceste tipuri de variabile pot fi furnizate şi observate în orice moment, se spune că sistemul este de tip continuu. Dar, există numeroase sisteme care se comportă altfel, în sensul că ne furnizează date la anumite momente sau acceptă comenzi la anumite momente. Se spune că aceste sisteme funcţionează discontinuu.

Obiectul de studiu în lucrarea de faţă îl constituie tocmai aceste sisteme cu funcţionare discontinuă, adică sistemele discrete.

Se abordează, pe rînd, probleme legate de operatorii de discretizare — operatorul de avans şi de diferenţă — probleme legate de şirurile discrete — şirul lui Kroneker, forme în E ale unui şir discret, convoluţia a două şiruri, — şi în sfîrşit, probleme legate de teoria funcţiilor de transfer.

Sînt prezentate pe de o parte, funcţii de transfer scalare, iar pe de altă parte matrice de transfer.

Partea finală a lucrării o constituie „teoria stărilor", care se referă, atît la variabile de stare ca atare, cît şi la vectori şi matrice de stare, abordîndu-se şi problema stărilor de echilibru şi a criteriilor de stabilitate.

Lucrarea vine în sprijinul tuturor celor ce se ocupă cu studiul sistemelor discrete.

C. Hârtu

DR. LETIȚIA ZAHIU
V. MANOLE
Academia de studii economice

Optimizarea folosirii îngrășămintelor chimice

Autorii abordează problema utilizării funcțiilor de producție, de costuri și beneficii în fundamentarea științifică a deciziilor care se iau în întreprinderile agricole cu privire la cantitățile de îngrășăminte chimice administrate la hectar în funcție de cultura și tipul de sol pe care se aplică. Astfel, folosirea acestora a permis determinarea raportului optim input-output dintre producția de grîu panificabil și cantitatea de îngrășăminte chimice administrate pe tipul de sol brun roșcat de pădure; au fost determinate, de asemenea, raporturile optime ce trebuie să existe între cele trei categorii de îngrășăminte din combinația N.P.K.

Fundamentarea științifică a deciziilor care se iau în întreprinderile agricole cu privire la cantitățile de îngrășăminte chimice administrate și structura acestora la hectar, pe feluri de culturi și pe tipuri de sol, este o cerință fundamentală a creșterii eficienței economice. Pe măsura sporirii cantităților de îngrășăminte puse la dispoziția agriculturii de către industria chimică, și deci a creșterii cheltuielilor întreprinderilor agricole pentru procurarea acestora, problema stabilirii cantităților optime pentru fiecare suprafață în parte devine o cale importantă de reducere a costului produselor agricole [1].

Cunoașterea limitei economice pînă la care aceste sporuri asigură valorificarea maximă a tuturor celorlalți factori de producție (sol, climă, apă, soiuri etc.) la nivelul tehnicii și tehnologiei date în fiecare etapă, se impune ca o condiție importantă a eficienței economice a producției vegetale. De aceea, cercetările efectuate în ultimii ani în țara noastră cu privire la elaborarea unor funcții, care să permită cunoașterea limitei economice pînă la care este eficientă sporirea cantităților de îngrășăminte chimice administrate la hectar pentru fiecare zonă de producție, pentru fiecare întreprindere agricolă și cultură, este o cerință stringentă a practicii.

Vom prezenta concluziile rezultate în urma unui studiu făcut cu ajutorul funcțiilor de producție, de costuri și beneficii la cultura grîului panificabil. Informațiile care au stat la baza calculării funcțiilor provin de la stațiunea experimentală Simnic-Craiova, și sînt rezultate ale unui mare număr de experiențe în care s-au variat dozele de îngrășăminte chimice în combinațiile N.P.K., în intervale egale cuprinse între 48—160 kg. azot la hectar, pe fonduri constante de: $K_0 P_0$; $K_0 P_{80}$; $K_{40} P_{80}$.

Aplicațiile făcute la stațiunea experimentală Simnic au constat în rotația grîu-porumb pe soluri brun roșcate de pădure, sărace în azot, moderat aprovizionate cu fosfor și bogate în potasiu, soluri aflate în diferite stadii de podzolire. S-a urmărit efectul diferitelor doze de îngrășăminte aplicate în condițiile menținerii constante a influenței celorlalți factori de producție. Aceasta ne-a permis cuantificarea influenței factorului „îngrășăminte".

Optimizarea acestui factor trebuie privită, însă, într-o optică dinamică deoarece factorii ce influențează producția agricolă nu sînt constanți pentru un număr mare de ani și nici măcar în decursul unui an. Îngrășămintele chimice își manifestă influența direct, în raport cu condițiile naturale și nivelul dat al tehnicii și al tehnologiei folosite. Cu toate neajunsurile luării în considerare a restului de factori de producție constanți, funcțiile de producție, de costuri și beneficii sînt instrumente importante în procesul de luare a deciziilor. Ele precizează raporturile input-output ce se stabilesc între producția de grîu planificată și îngrășămintele chimice administrate. Totodată, ele definesc și unele raporturi dintre diferite categorii de îngrășăminte (N.P.K). Forma parabolică a funcțiilor, așa cum rezultă din literatura de specialitate, exprimă cel mai bine corelația dintre evoluția sporului și diferite niveluri de alocare a factorului „îngrășămînt" [6]. Întrucît s-a urmărit nu numai efectul unui anumit fel de îngrășămint, ci și efectul combinat al N.P.K. asupra randamentelor medii la hectar, am folosit funcții monofactoriale și bifactoriale. Totodată, s-au calculat și coeficienții multiplii de corelație, care stabilesc aportul fiecărui fel de îngrășămint la sporul realizat și care atestă validitatea funcțiilor.

FUNCȚII DE PRODUCȚIE ȘI ECONOMICE

Funcția de producție monofactorială ne permite să stabilim optimul tehnic prin calcularea derivatei întîi și înlocuirea valorilor lui x (dozele de azot), de unde rezultă randamentul maxim la hectar (y) (tabelul 1). Funcția rezultată are următoarea formă:

$$y = 2499{,}4 + 25{,}37\, x - 0{,}0947\, x^2.$$

Validitatea funcției este atestată de coeficientul de corelație care are valoarea de 0,66.

Din calculele făcute rezultă că optimul tehnic se obține cu doza de 128 kg azot, care asigură un spor maxim de 1 696 kg. la hectar, pe un fond de P_{48}, K_0. La această doză se realizează un spor de 13 kg grîu la un kg azot substanță activă (s.a.), ceea ce reflectă o reacție foarte bună a solurilor la îngrășămintele cu azot administrate.

Funcția tehnică de producție, care exprimă relația tehnică între producție și factorul îngrășămînt, ne poate oferi date pentru fundamentarea științifică a deciziilor întrucît pe baza sa se calculează funcția economică. Ea ne arată pînă la ce nivel trebuie mărit consumul de îngrășăminte. Funcția economică, care poate fi de cost sau de beneficiu, arată care sînt limitele realizării eficienței economice maxime.

Pe baza funcției tehnice s-au calculat funcțiile economice (tabelul 1). Astfel, funcția valorii producției (PY) s-a calculat prin înmulțirea funcției tehnice (Y) cu prețul de vînzare unitar al grîului considerat, în medie, 1 leu (deci $PY = Y$). În continuare, se studiază variația valorii producției suplimentare ca urmare a alocării unor cantități suplimentare de îngrășăminte. Valoarea producției suplimentare (ΔPY) este reprezentată de sporul sau variația valorii producției prin administrarea unor doze suplimentare. S-au calculat apoi funcțiile: costului variabil (CX), costului total (CT), funcția beneficiului total (B), precum și valorile suplimentare ale acestora (ΔCX, ΔCT, ΔB), determinate de administrarea unor doze suplimentare egale de îngrășăminte. Pe baza acestor funcții s-a studiat efectul global și suplimentar (parțial) al diferitelor doze de azot asupra producției de grîu, folosindu-se indicatori care exprimă, sub diferite aspecte, eficiența economică a aplicării îngrășămintelor chimice, precum și zonele cele mai favorabile de care întreprinderile agricole trebuie să țină seama în procesul de luare a deciziilor.

Indicatorii economici calculați sînt:

— producția fizică la ha (Y);
— producția fizică suplimentară totală pe unitatea de resursă Y'/X;
— producția fizică suplimentară pe unitatea de resursă suplimentară ($\Delta Y/\Delta X$);
— costul variabil la hectar (CX)*;
— costul total la hectar (CT)**;
— costul suplimentar la hectar (ΔCT);
— coeficientul de elasticitate a producției ($E_p = \Delta PY/\Delta CT$);
— costul unitar al sporului total (CT/Y);
— costul unitar al sporului suplimentar ($\Delta CT/\Delta Y$);
— beneficiul total pe unitatea de resursă (B/X);
— beneficiul suplimentar pe unitatea de resursă adiționată ($\Delta B/\Delta Y$);
— rata rentabilității totale $\left(\frac{B}{CT} \cdot 100\right)$;
— rata rentabilității suplimentare $\left(\frac{\Delta B}{\Delta CT} \cdot 100\right)$.

În figurile 1 și 2 sînt reprezentate funcțiile calculate, precum și variațiile acestora în funcție de cantitățile suplimentare de îngrășăminte alocate.

*) Costurile variabile la ha depind de doza administrată. Costul unui kg de azot s.a. este de 3,50 lei.

**) Costul total la ha este format din: costurile variabile și costurile fixe. Costurile fixe cuprind toate cheltuielile necesitate de cultura grîului, considerate constante.

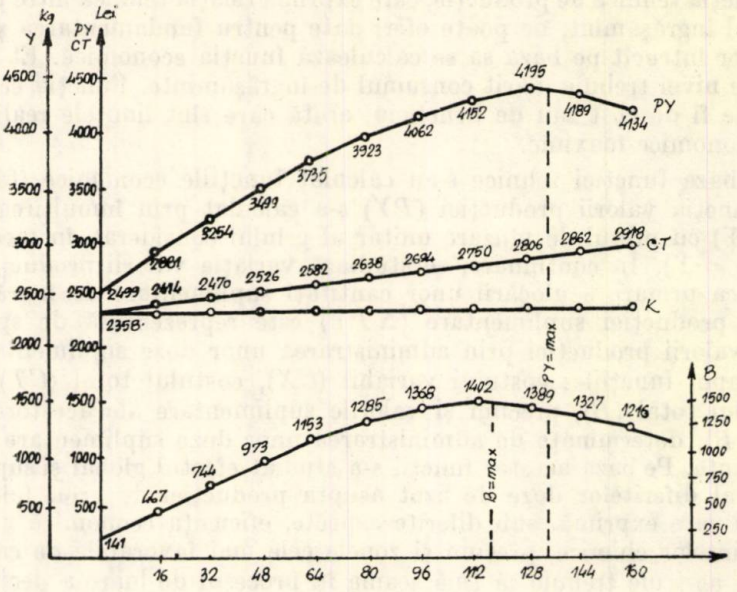


Fig. 1

Din datele tabelului 1 şi din reprezentarea grafică a acestora rezultă că trebuie sporită cantitatea de îngrăşămînt dacă creşterea valorii producţiei (ΔPY) este mai mare decît creşterea costului factorului variabil (ΔCX), deoarece costurile suplimentare sînt recuperate prin creşterea mai accentuată a valorii producţiei. Zona favorabilă pentru aplicarea dozelor suplimentare este determinată de recuperarea cheltuielilor pe seama sporului de producţie. Creşterea dozelor aplicate este oportună pînă în punctul în care:

$$\frac{\Delta PY}{\Delta X_1} = CX_1,$$

respectiv în punctul în care valoarea producţiei suplimentare este egală cu costul suplimentar al îngrăşămintelor. În acest punct se realizează optimul economic. În cazul nostru, această relaţie se asigură acolo unde valoarea producţiei este egală cu 56 lei (costul a 16 kg azot s.a.), adică la o cantitate totală de 112 kg azot. La această cantitate, considerată optimă din punct de vedere economic, se realizează cel mai ridicat nivel al beneficiului la hectar (1402 lei), iar beneficiul suplimentar este egal cu zero ($\Delta B = 0$). În acest punct, elasticitatea valorii producţiei este egală cu 1 ($E_p = 1$). Tot la această doză se realizează cel mai redus cost pe unitatea de produs (0,62 lei/kg) şi cea mai ridicată rată a rentabilităţii (50,98%). Zona cea mai favorabilă pentru alocarea suplimentară de factori este cea în care beneficiul total creşte, iar beneficiul mediu pe unitatea de resursă (B/X), beneficiul suplimentar ($\Delta B/\Delta X$) şi rata rentabilităţii au tendinţă de scădere.

Pînă la doza la care se atinge optimul economic în folosirea îngrășămintelor chimice, sporul total de producție și beneficiul total sînt mult mai scăzute deși se asigură o eficiență mai ridicată pe unitatea de resursă (venitul mediu și cel suplimentar pe unitatea de resursă sînt mai mari), iar coeficientul de elasticitate este supraunitar. Aceasta se explică prin valorificarea insuficientă a celorlalți factori de producție. Dincolo de doza cu care se realizează optimul economic, coeficientul de elasticitate al producției devine subunitar, costul unitar al producției totale începe să crească, iar cel al producției suplimentare depășește prețul de vînzare pe unitatea de produs; beneficiul total la hectar și cel pe unitatea de resursă scad, beneficiul suplimentar la hectar și cel pe unitatea de resursă se transformă în pierderi; rata rentabilității totale are tendința să se transforme în pierderi, iar rata rentabilității suplimentare se transformă într-o rată a pierderii.

Alocarea de resurse suplimentare peste doza care asigură realizarea optimului economic este dăunătoare activității întreprinderilor.

FUNCȚII TEHNICE ȘI ECONOMICE BIFACTORIALE

Sporul de producție este rezultatul efectului combinat al cantităților N.P.K. și al costului lor diferit. De aceea, întreprinderile agricole trebuie să ia decizii, fie în sensul maximizării beneficiului pe un fond comun de cheltuieli efectuate cu îngrășămintele chimice, fie în sensul minimizării cheltuielilor cu îngrășămintele chimice pentru un nivel stabilit al producției.

Funcția de producție bifactorială rezultată din prelucrarea la calculator a datelor experimentale pe mai mulți ani este:

$$Y = 2186{,}8 + 17{,}9\,x_1 - 0{,}163\,x_1^2 + 25{,}37\,x_2 - 0{,}0947\,x_2^2.$$

Atestarea validității funcției este dată de coeficientul de corelație care este 0,68.

Cele două variabile x_1 (fosfor) și x_2 (azot) asigură realizarea optimului tehnic (4373 kg) la o doză de 128 kg azot și 56 kg fosfor pe un fond de K_0. În acest punct, sporul maxim* este de 2186 kg grîu la hectar, din care 1695 kg se datorește efectului azotului și 491 kg efectului fosforului. Revin 13 kg grîu pentru 1 kg azot s.a. și numai 6,90 kg pentru 1 kg fosfor s.a. Efectul fosforului asupra producției de grîu este mult mai redus, din cauza acidității solului.

Eficiența economică a fertilizării solurilor brun roșcate de pădure cu azot și fosfor rezultă din transformarea funcției tehnice de mai sus în funcție economică, folosind metodologia și nivelul prețurilor producției și resurselor de la funcția monofactorială. Astfel, valoarea producției totale atinge nivele diferite la doze diferite de azot și fosfor, optimul tehnic fiind în punctul N_{128} P_{56} (tabelul 2).

*) Cuantificarea influenței pe factori asupra sporului maxim de producție se realizează cu ajutorul derivatelor parțiale ale funcției în raport cu fiecare din aceștia.

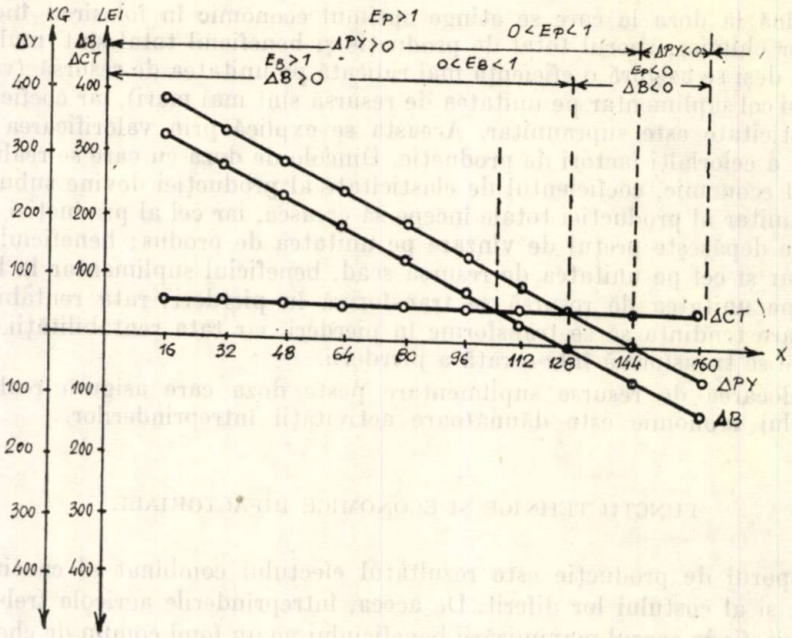

KG
LEI
ΔY
ΔB
ΔCT
Ep>1
ΔPY>0
0<Ep<1
ΔPY<0
Ep<0
EB>1
ΔB>0
0<EB<1
ΔB<0
400
300
200
100
16
32
48
64
80
96
112
128
144
160
X
ΔCT
ΔPY
ΔB

Fig. 2

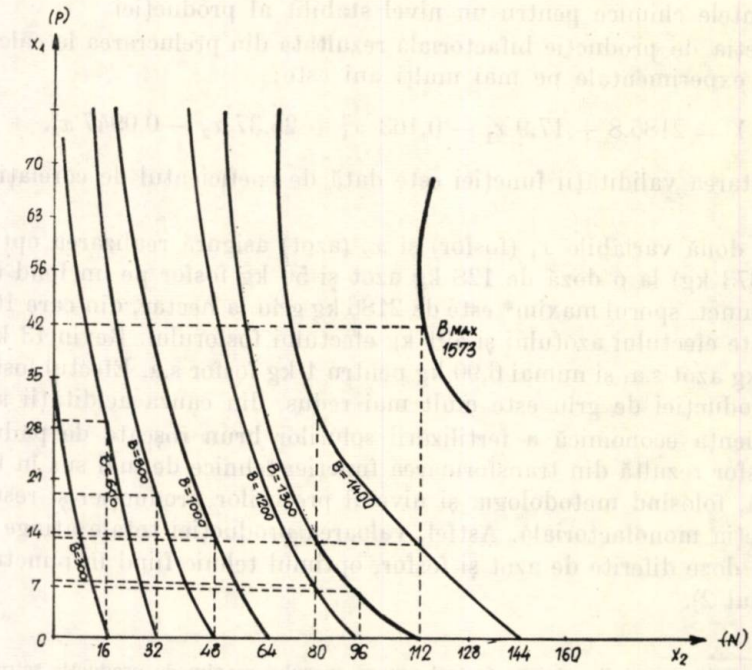

(P)
X1
70
63
56
42
35
28
21
14
7
0
B=800
B=1000
B=1200
B=1400
B MAX
1573
16
32
48
64
80
96
112
128
144
160
X2
(N)

Fig. 3

La aceste doze se realizează cea mai ridicată valoare a sporului la hectar.

Pe baza costurilor de producție variabile și a sporului realizat s-a putut calcula costul unității de spor total (tabelul 3).

Zona optimului economic este mult mai largă, dacă o privim sub aspectul costului unitar pe kg. Beneficiul maxim la hectar se realizează la doza optimă de N_{112} și P_{42} (tabelul 4), ori costul unitar pe kg spor total este același între P_0 — P_{42}. Aceasta înseamnă că, din punctul de vedere al eficienței economice, efectul fosforului este nesemnificativ datorită sporului rezultat și al costului pe kg s.a. (3,30 lei).

În tabelul 4 și figura 3 se poate observa variația beneficiului la hectarul de grîu, rezultat în urma aplicării a diferite doze de azot și fosfor.

Optimul economic (atins la dozele N_{112} P_{42}) este reflectat de beneficiul la hectar de 1 573 lei, din care 1 248 lei s-au obținut ca efect al azotului, și numai 325 lei ca efect al fosforului. Fără îndoială că nu poate fi neglijat și efectul acestuia din urmă, mai ales sub aspectul sporului total la hectar. În condițiile unui grad mai scăzut de aprovizionare a solului cu fosfor, optimul economic este condiționat de realizarea unei combinații optime între azot și fosfor. În cazul nostru, cerințele în fosfor sînt foarte mici. La N_{112} și P_{42}, de pildă, sporul de beneficiu rezultat ca efect al fertilizării cu fosfor este de numai 152 lei la hectar, iar la P_{70} (variantă experimentală) se realizează un beneficiu suplimentar la hectar sub nivelul celui realizat la doza P_{21}.

Pentru aprecierea optimului economic, a nivelului la care se realizează de fapt eficiența maximă în folosirea îngrășămintelor chimice, se folosesc mai multe criterii. Aceste criterii exprimă, prin indicatori statistici multipli, laturi diferite ale eficienței economice. Astfel, în cazul în care întreprinderile agricole nu au posibilitatea să se aprovizioneze cu cantități suficiente de îngrășăminte chimice, pot folosi drept criterii de apreciere a eficienței economice costul unitar al produsului și rata rentabilității. În cazul în care dispun de resurse suficiente, cunoscînd optimul economic, pot folosi drept criterii în fundamentarea deciziilor volumul beneficiului total la hectar, corelat cu sporul de producție și cu rata rentabilității.

Funcțiile de producție bifactoriale scot în evidență faptul că prin combinarea azot-fosfor, în condițiile date, nu se aduc modificări sensibile în ceea ce privește randamentele medii la hectar. Cultura grîului, pe solurile respective, necesită cantități reduse de îngrășăminte cu fosfor și nu necesită potasiu.

Optimizarea cantităților de îngrășăminte chimice, la fiecare cultură și pe fiecare tip de sol, asigură folosirea unor coeficienți tehnico-economici fundamentați pentru întocmirea modelelor matematice în vederea optimizării tehnologiilor și a profilului de producție. Folosirea mai multor criterii exprimă laturi diferite ale eficienței economice, creează posibilitatea de a alege acele combinații de culturi și doze care sînt convenabile pentru fiecare întreprindere. Modificarea acestor combinații este în funcție de schimbarea condițiilor tehnice, organizatorice, sociale și a cerințelor economiei naționale pentru un produs sau altul.

Tabelul 1

Funcția monofactorială la grîu

		$Y=2499,4+25,37\ x-0,0947\ x^2$ P=48 K=0										
		N=0	N=16	N=32	N=48	N=64	N=80	N=96	N=112	N=128	N=144	N=160
1. Valoarea totală a producției (lei/ha)	Py	2499	2881	3214	3499	3735	3923	4062	4152	[4195]	4189	4134
2. Valoarea producției suplimentare (lei/ha)	ΔPy	0	382	333	285	236	188	139	90	43	−6	−55
3. Producția medie pe unitatea de resursă (kg)	Y/X	0	24	22	21	19	18	16	15	13	12	10
4. Producția fizică suplimentară pe unit. de resursă	$\Delta y/\Delta x$	0	24	21	18	15	12	9	6	2,7	−0,38	−3,44
5. Costul suplimentar (lei/ha)	Cx	0	56	112	168	224	280	336	392	448	504	560
6. Costul total (lei/ha)	CT	2358	2414	2470	2526	2582	2638	2694	2750	2806	2862	2919
7. Costul suplimentar (lei/doză)	ΔCT	0	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56
8. Coeficientul de elasticitate a producției (Ep)	$\Delta Py/\Delta CT$	0	6,80	5,95	5,09	4,21	3,36	2,48	1,61	0,77	0,11	0,98
9. Costul unitar al sporului total (lei/kg.)	CT/y	0,96	0,84	0,77	0,72	0,69	0,67	0,67	0,67	0,67	0,68	0,71
10. Costul unitar al sporului suplimentar (lei/kg)	$\Delta CT/\Delta y$	0	0,15	0,17	0,20	0,24	0,30	0,40	0,62	1,30	9,33	1,02
11. Beneficiu total (lei/ha)	B	141	467	744	973	1153	1285	1368	[1402]	1389	1327	1210
12. Beneficiu suplimentar (lei/ha)	ΔB	0	326	277	229	180	132	83	59	43	32	−111
13. Beneficiu total pe unitatea de resursă	B/X	0	29,19	23,25	20,27	18,02	16,06	14,25	12,52	10,85	9,22	7,60
14. Beneficiu suplimentar pe unitate de resursă	$\Delta B/\Delta X$	0	20,38	17,31	14,31	11,25	8,15	6,19	2,13	− 0,81	−3,88	−6,94
15. Rata rentabilității totale	$B/CT \cdot 100$	5,98	19,35	30,12	38,52	44,66	48,71	50,78	50,98	49,50	46,37	41,67
16. Rata rentabilității suplimentare	$\Delta B/CT \cdot 100$	0	582	495	409	321	236	148	61	−23	−111	−198

Tabelul 2

Funcția valorică bifactorială la grîu (lei/ha)

K	$Y = 2186{,}8 + 17{,}9\ x_1 - 0{,}163\ x_1^2 + 25{,}37\ x_2 - 0{,}0947\ x_2^2$										
	$X_2=0$	$X_2=16$	$X_2=32$	$X_2=48$	$X_2=64$	$X_2=80$	$X_2=96$	$X_2=112$	$X_2=128$	$X_2=144$	$X_2=160$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$X_1 = 0$	2187	2568	2902	3186	3423	3610	3750	3840	3882	3876	3822
$X_1 = 7$	2304	2685	3019	3303	3540	3727	3867	3957	3999	3993	3939
$X_1 = 14$	2405	2787	3121	3405	3642	3829	3969	4059	4101	4095	4041
$X_1 = 21$	2491	2872	3206	3490	3727	3914	4054	4144	4186	4180	4126
$X_1 = 28$	2560	2941	3275	3559	3796	3983	4123	4213	4255	4249	4195
$X_1 = 35$	2614	2995	3329	3613	3850	4037	4177	4267	4309	4303	4249
$X_1 = 42$	2651	3032	3366	3650	3887	4074	4214	4304	4346	4340	4286
$X_1 = 49$	2673	3054	3388	3672	3909	4096	4236	4326	4368	4362	4308
$X_1 = 56$	2678	3059	3393	3677	3914	4101	4241	4331	4373	4367	4313
$X_1 = 63$	2668	3049	3383	3667	3904	4091	4231	4321	4363	4357	4303
$X_1 = 70$	2641	3022	3356	3640	3877	4064	4204	4294	4336	4330	4276

Tabelul 3

Costul unitar al sporului de producție (lei/kg)

K=0	$X_2=0$	$X_2=16$	$X_2=32$	$X_2=48$	$X_2=64$	$X_2=80$	$X_2=96$	$X_2=112$	$X_2=128$	$X_2=144$	$X_2=160$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$X_1=0$	0	0,15	0,16	0,17	0,18	0,20	0,21	0,24	0,26	0,30	0,34
$X_1=7$	0,20	0,16	0,16	0,17	0,18	0,20	0,21	0,23	0,26	0,29	0,33
$X_1=14$	0,21	0,17	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,23	0,26	0,29	0,33
$X_1=21$	0,23	0,18	0,18	0,18	0,19	0,20	0,22	0,24	0,26	0,29	0,32
$X_1=28$	0,25	0,20	0,19	0,19	0,20	0,21	0,22	0,24	0,26	0,29	0,32
$X_1=35$	0,27	0,21	0,20	0,19	0,20	0,21	0,23	0,24	0,27	0,29	0,33
$X_1=42$	0,30	0,23	0,21	0,21	0,21	0,22	0,23	0,24	0,27	0,30	0,33
$X_1=49$	0,33	0,25	0,23	0,22	0,22	0,23	0,24	0,26	0,28	0,31	0,34
$X_1=56$	0,38	0,28	0,25	0,24	0,24	0,24	0,25	0,27	0,29	0,32	0,35
$X_1=63$	0,43	0,31	0,27	0,25	0,25	0,26	0,27	0,28	0,30	0,33	0,36
$X_1=70$	0,51	0,34	0,29	0,27	0,27	0,27	0,28	0,30	0,32	0,34	0,38

Tabelul 4

Beneficiul realizat la ha. de grîu (lei)

K=0	$X_2=0$	$X_2=16$	$X_2=32$	$X_2=48$	$X_2=64$	$X_2=80$	$X_2=96$	$X_2=112$	$X_2=128$	$X_2=144$	$X_2=160$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$X_1=0$	−13	312	590	818	999	1130	1214	1248	1234	1172	1062
$X_1=7$	81	406	684	912	1093	1224	1308	1342	1328	1266	1156
$X_1=14$	159	485	763	991	1172	1303	1387	1421	1407	1345	1235
$X_1=21$	222	547	825	1053	1234	1365	1449	1483	1469	1407	1297
$X_1=28$	268	593	871	1099	1280	1411	1495	1529	1515	1453	1343
$X_1=35$	298	623	901	1129	1310	1441	1525	1559	1545	1483	1373
$X_1=42$	312	637	915	1143	1324	1455	1539	1573	1559	1497	1387
$X_1=49$	311	636	914	1142	1323	1454	1538	1572	1558	1496	1386
$X_1=56$	293	618	896	1124	1305	1436	1520	1554	1540	1478	1368
$X_1=63$	260	585	863	1094	1272	1403	1487	1521	1507	1445	1335
$X_1=70$	210	535	813	1041	1222	1353	1437	1471	1457	1395	1285

BIBLIOGRAFIE

1. BRAȘOVEANU, N.: *Opțiuni în procesul de repartizare a îngrășămintelor chimice pe teritoriu și culturi.* În: „Conducerea proceselor economice din agricultură". Editura Academiei R.S.R., București, 1972.
2. CRIȘAN, I.: *Influența fertilizării cu îngrășăminte chimice a culturii grîului și porumbului pe diferite tipuri de soluri.* Laboratorul de agrochimie Timișoara, 1970.
3. ENCIU, M., PLOAE, V.: *Cercetări privind aplicarea îngrășămintelor chimice la grîul cultivat în condiții de irigare în Dobrogea.* Lucrări științifice, vol. V. Stațiunea de cercetări pentru culturi irigate Valul lui Traian, 1976.
4. HEADY, E. O., DILLON, J. L.: *Agricultural production functions.* Yowa State University Press, Annes, Yowa, 1961.
5. * * * *Funcțiile de producție în agricultură.* Caiet documentar nr. 10, Colecția „Ex terra aurum" I.C.E.A.O.I.A.S., București, 1969.

30.09.1975

E. STĂICUȚ

Institutul central pentru conducere și informatică — București

A. BARCHANSKI

Instytut Informatyki Czasu Rzeczywistego, Politechnika Slaska, Gliwice, Polonia

Considerații asupra proiectării unei interfețe pentru rețele de calculatoare

Scopul acestui articol este de a prezenta cîteva probleme tehnice care se întîlnesc în proiectarea unei interfețe între calculatoare. Este tratată atît interfața hardware cît și software necesare pentru conectarea unui calculator la un nod al unei rețele de comunicații pentru calculatoare. Descrierea este independentă de calculator, adică nu se referă la un anumit tip de calculator. În principiu, interfața este împărțită în două părți, o parte este standard (aceeași pentru orice tip de calculator), și o a doua parte, care depinde de calculatorul particular ce urmează a se conecta la rețeaua de comunicație. În acest articol, se prezintă funcțiile efectuate de interfață precum și felul în care sînt rezolvate principalele conflicte (coordonarea proceselor asincrone din cele două calculatoare, lungimi de cuvînt diferite, viteze diferite etc.)

1. INTRODUCERE

Prin rețea de calculatoare se înțelege interconectarea mai multor calculatoare separate cu scopul de a-și distribui între ele resursele de calcul și memorie, interconectarea făcîndu-se în așa fel încît fiecare calculator poate avea acces la oricare calculator din rețea și totodată fiecare calculator poate executa prelucrări independent de celelalte.

O rețea de calculatoare are două componente principale: o rețea de comunicații, care, în acest articol, sînt denumite calculatoare pentru prelucrarea datelor (CPD). Rețeaua de comunicații cuprinde toate componentele hardware și software (modemuri, linii de comunicație, concentratoare, calculatoare de comunicație etc.) dedicate în mod special transferului de date de la un nod la altul [2], figura 1.

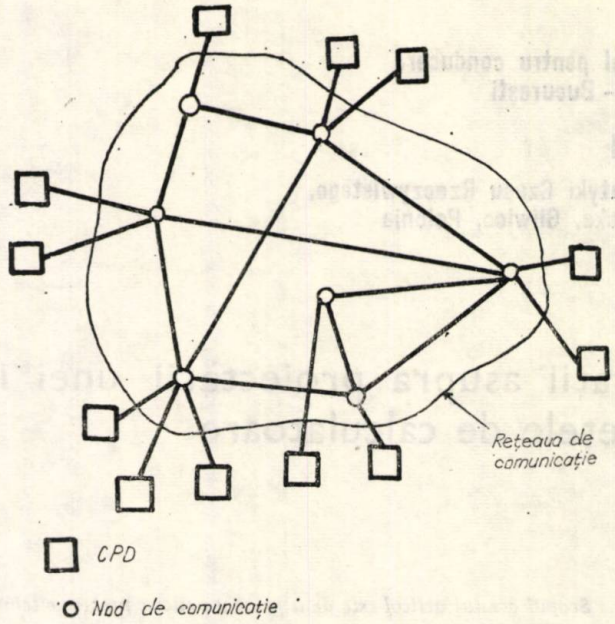


Fig. 1

Funcția principală pe care o realizează o rețea de calculatoare este distribuirea de resurse de calcul și memorie, ceea ce reprezintă în unele aplicații o tehnică mai eficientă de utilizare a calculatoarelor.

Printre avantajele oferite utilizatorilor de către o rețea de calculatoare amintim [2]:

a) creșterea puterii de calcul;
b) fișiere de date centralizate;
c) flexibilitate în alegerea componentelor hardware și software;
d) echilibrarea încărcării sistemelor din rețea;
e) folosirea în comun a unor echipamente costisitoare.

2. CONCEPTUL DE INTERFAȚĂ

Prin interfață se înțelege limita de separare între două echipamente între care se schimbă semnale [7]. Definiția cuprinde sensul și nivelul semnalelor schimbate, independența, succesiunea în timp a semnalelor și succesiunea operațiilor. Noțiunea de interfață a fost extinsă astfel că include și ideea de interfață software. Esența noțiunii de interfață constă în definirea semnalelor care traversează interfața și semnificația acestora.

În mod normal, calculatorul din nod și CPD pot prelua (sau transmite) date la viteze mari, dar ele nu sînt totdeauna gata de a prelua (sau transmite). Pentru coordonarea transmisiei între CPD și nod se folosește o procedură de tip „handshake" [7]—[12]. Transferul de date de la sursă la acceptor are loc

numai atunci cînd atît sursa cît şi acceptorul au indicat că sînt gata. Aceasta permite ca fie sursa fie acceptorul să blocheze transmisia în intervalul dintre două transferuri de date pentru a avea suficient timp necesar pentru scoaterea sau depunerea unui cuvînt în memorie sau pentru activarea unei rutine de întrerupere, care să iniţieze noi buffere de intrare şi ieşire [17].

Calculatoarele interconectate într-o reţea sînt de obicei de tipuri diferite. Pentru a evita dificultăţile rezultate din lungimi de cuvînt diferite de la un calculator la altul, datele sînt transferate în serie bit cu bit.

3. INTERFAŢA HARDWARE

În funcţie de nivelul la care se aplică controlul prin procedura handshake, deosebim două tipuri de interfeţe: cu confirmare de mesaj şi cu confirmare de bit.

3.1 Interfaţă cu confirmare de mesaj

O astfel de interfaţă întîlnim în reţeaua KUIPNET (Kyoto University Information Processing Network), [3]—[6]. Legătura fizică între CPD şi nod este realizată prin patru fire, două pentru fiecare direcţie, figura 2. Trei semnale de control (START, READY, END) sînt folosite pentru controlul transferului de date în fiecare direcţie.

În cazul în care se transmite un mesaj de la CPD la nod, CPD trebuie să transmită mai întîi semnalul START la nod, cerîndu-i să se pregătească pentru recepţia unui mesaj. Cînd nodul este gata, răspunde cu semnalul READY.

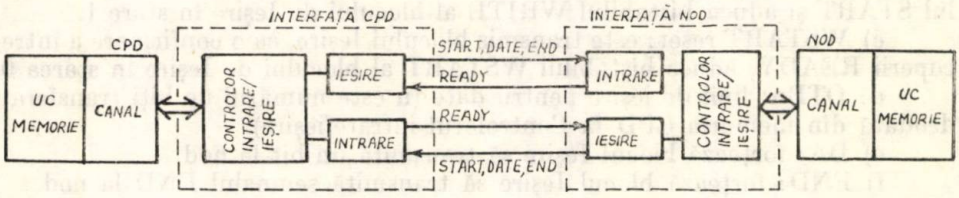


Fig. 2

Numai după ce CPD a primit semnalul READY, transmite mesajul (bit cu bit) la nod. La sfîrşitul transferului, CPD transmite nodului semnalul END. Transmisia de la nod la CPD se face în mod similar.

Deoarece interfaţa CPD şi interfaţa nod au structuri similare, mai jos se descrie doar interfaţa CPD.

Interfaţa CPD este formată din trei blocuri: Controlor intrare/ieşire, Intrare şi Ieşire.

Blocurile Intrare şi Ieşire sînt independente de tipul calculatorului ce urmează a se conecta.

Funcţiunile Controlorului intrare/ieşire sînt următoarele:

— generarea semnalelor corespunzătoare instrucţiunilor unităţii centrale a CPD;

— transferul semnalelor de control și date între canal și blocurile Intrare și Ieșire;

— testarea stării blocurilor Intrare și Ieșire și transmiterea informațiilor de stare la unitatea centrală la cererea acesteia.

În descrirea ce urmează în următoarele paragrafe sînt menționate patru circuite bistabile. Astfel, blocul Ieșire are două bistabile denumite WRITE și WSTART. Bistabilul WRITE indică faptul că blocul Ieșire este activ. Este pus în starea 1 atunci cînd blocul Ieșire transmite semnalul de control START la nod și este pus în starea 0 atunci cînd semnalul de control END este transmis la nod. Bistabilul WSTART indică faptul că semnalul de control READY transmis de nod a sosit.

Blocul Intrare are două bistabile denumite RSTART și READ. Bistabilul RSTART este pus în starea 1 atunci cînd sosește semnalul de control START transmis de nod și este adus în starea 0 după ce calculatorul CPD a semnalizat că întreruperea cauzată de semnalul START a fost luată în considerație. Bistabilul READ indică faptul că blocul Intrare este activ. Este adus în starea 1 atunci cînd blocul Intrare transmite semnalul de control READY la nod indicîndu-i că este gata să primească date. Este adus în starea 0 atunci cînd semnalul de control END transmis de nod a sosit.

Semnalele transferate între Controlorul intrare/ieșire și blocurile Intrare și Ieșire sînt:

De la Controlorul intrare/ieșire la blocul Ieșire

a) INIT: inițializează blocul Ieșire și anume aduce la 0 toate bistabilele sale.

b) WRITE set: forțează blocul de Ieșire să transmită nodului semnalul START și aduce bistabilul WRITE al blocului de Ieșire în stare 1.

c) WSTART reset: este transmis blocului Ieșire, ca o confirmare a întreruperii READY, aduce bistabilul WSTART al blocului de Ieșire în starea 0.

d) OTBn: linii de ieșire pentru date (n este numărul de biți transferați deodată din memoria CPD la Controlorul intrare/ieșire).

e) DA: forțează blocul Ieșire să transmită un bit la nod.

f) END: forțează blocul Ieșire să transmită semnalul END la nod.

De la blocul Ieșire la Controlorul intrare/ieșire

a) READY: este generat la sosirea semnalului READY de la nod. Produce întreruperea calculatorului pentru prelucrare de date.

d) WREQ: cere transferul unui nou cuvînt din memorie.

c) WSTART: este ieșirea bistabilului WSTART care arată că a sosit semnalul READY de la nod. Este necesar să fie adus în starea 0 de către semnalul WSTART, așa cum s-a descris mai sus.

d) WRITE: este ieșirea bistabilului WRITE, care indică faptul că blocul Ieșire este activ. Este adus la 1 de către semnalul WSTART. Cînd semnalul END este transmis la nod este adus la 0 în mod automat.

De la blocul Intrare la Controlorul intrare/ieșire

a) RSTART: este rezultatul sosirii semnalului START de la nod; produce întreruperea CPD-ului. Este necesar să fie adus la zero de semnalul RSTART reset.

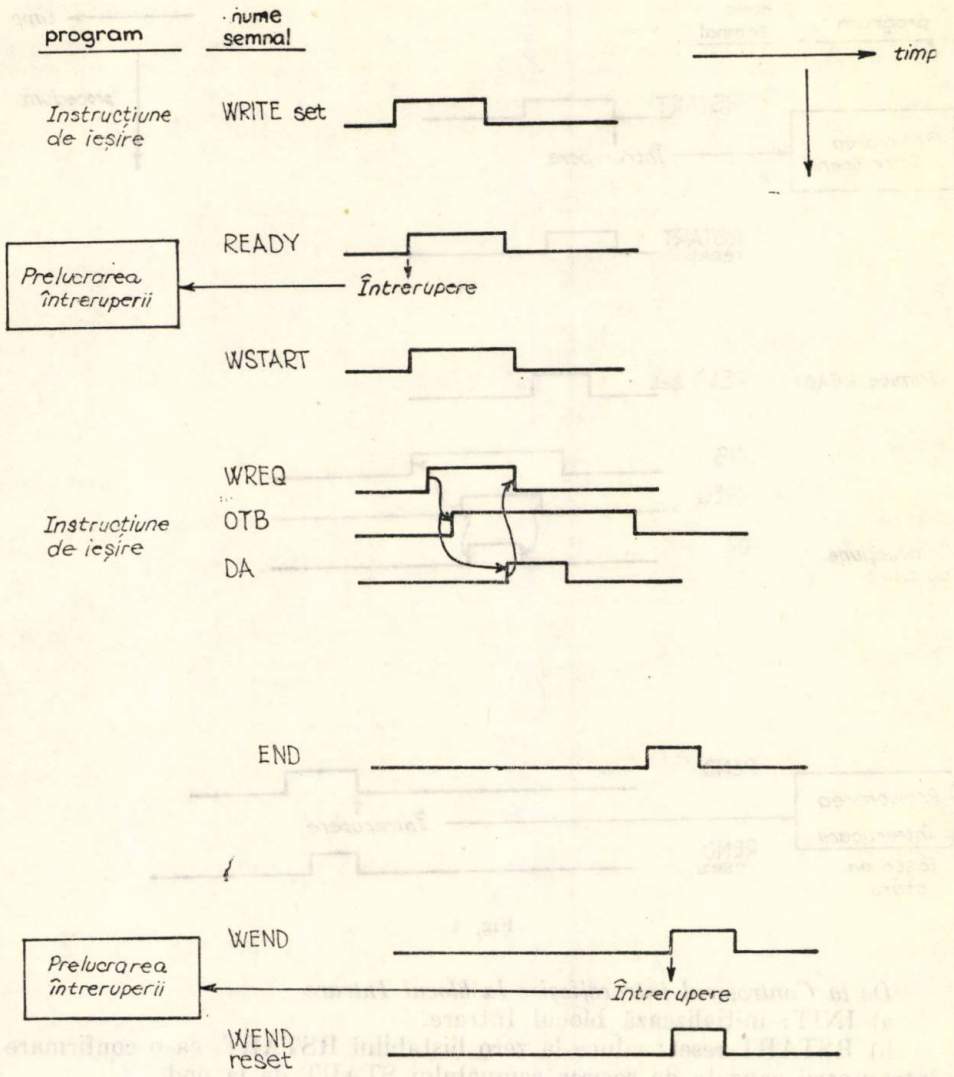


Fig. 3

b) READ: este ieșirea bistabilului READ indicînd că blocul Intrare este activ. Acest bistabil este adus în starea 1 de semnalul READ set și în starea 0 de semnalul REND atunci cînd semnalul END este transmis de nod.

c) INBn: linii de intrare date.

d) RREQ: arată că au sosit datele transmise de nod.

e) PARITY: arată că datele venite de la nod au erori de transmisie.

d) REND: este cauzat de îndeplinirea a două condiții: (1) sosirea semnalului END de la nod, (2) transferul în memoria CPD a datelor sosite anterior de la nod. Este adus la 0 de către semnalul REND reset.

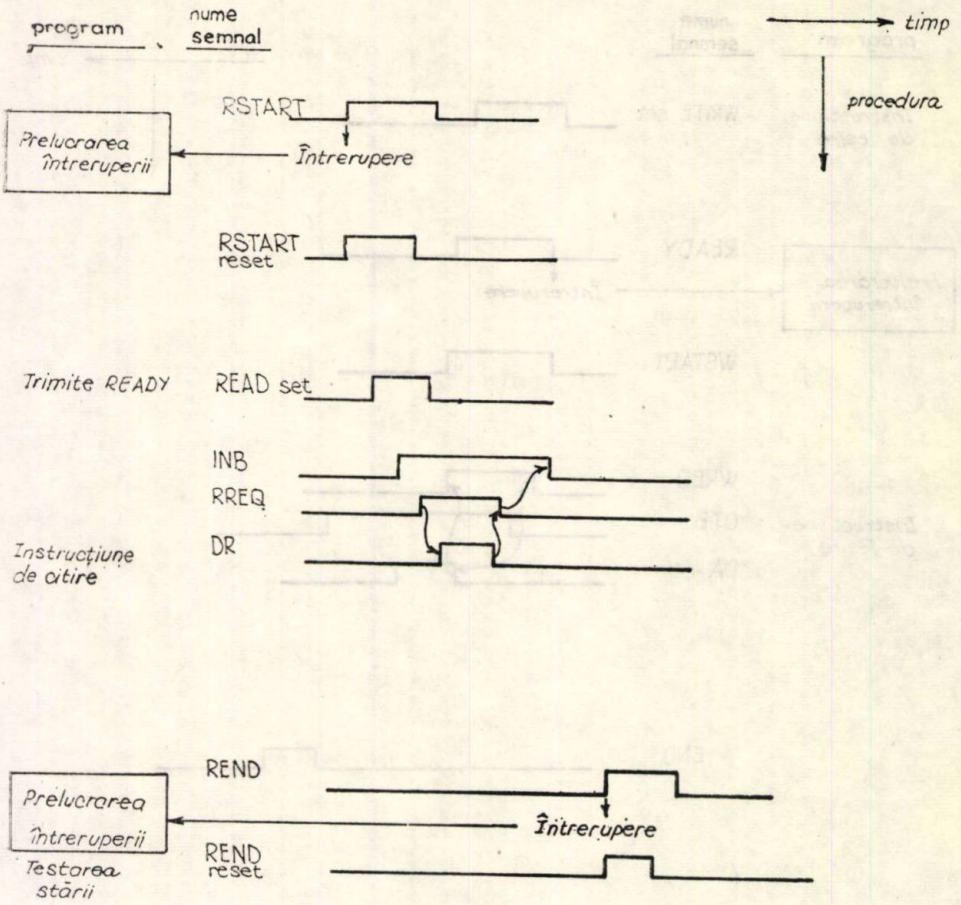


Fig. 4

De la Controlorul intrare/ieşire la blocul Intrare

a) INIT: iniţializează blocul Intrare.

b) RSTART reset: aduce la zero bistabilul RSTART, ca o confirmare a întreruperii cauzate de sosirea semnalului START de la nod.

c) READ set: pune bistabilul READ în starea 1 şi produce transmiterea semnalului READY la nod.

d) REND reset: aduce bistabilul REND în starea zero, ca o confirmare a completării prelucrării întreruperii cauzate de semnalul de control END venit de la nod.

e) DR: arată că datele au fost transferate în memoria CPD.

Deoarece calculatorul din nod şi CPD funcţionează asincron poate să apară situaţia în care ambele transmit simultan un semnal de control START. În acest caz CPD are prioritate în transmiterea mesajului.

Pentru a înţelege mai bine acţiunea semnalelor descrise mai sus, figurile 3 şi 4 reprezintă o diagramă în timp a semnalelor mai importante.

3.2. Interfață cu confirmare de bit

Mai jos este prezentată interfața dintre un calculator HOST (noțiune folosită de ARPA pentru CPD) și nodul rețelei de comunicație (cunoscut în literatură sub denumirea de IMP — Interface Message Processor) pentru rețeaua ARPA (Advanced Research Projects Agency) din S.U.A. [1]. Aceasta este împărțită în două secțiuni: interfața HOST specială și interfața IMP/HOST standard, figura 5.

Transferul datelor între HOST și IMP este identic în ambele direcții. De exemplu, transferul informației de la HOST la IMP se face în felul următor. Informația este preluată din memoria HOST-ului cuvînt cu cuvînt și

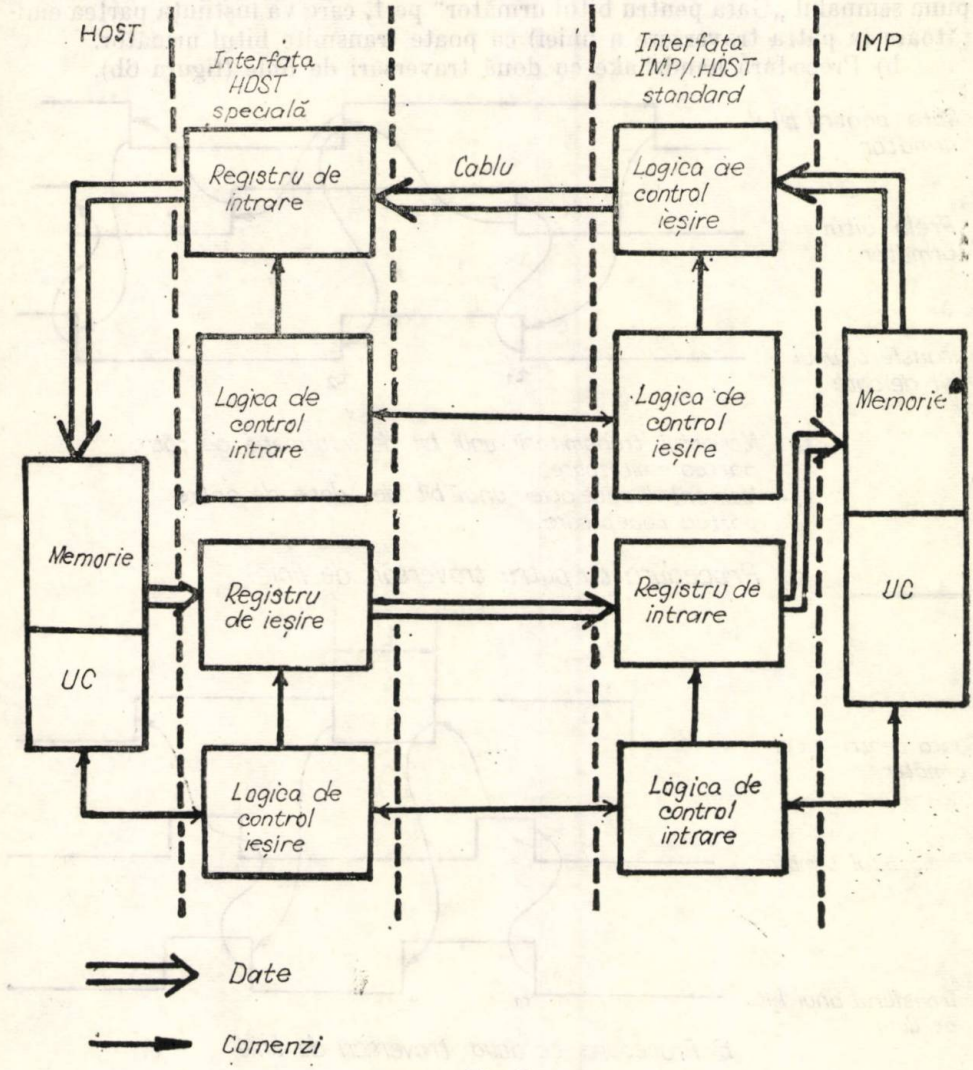


Fig. 5

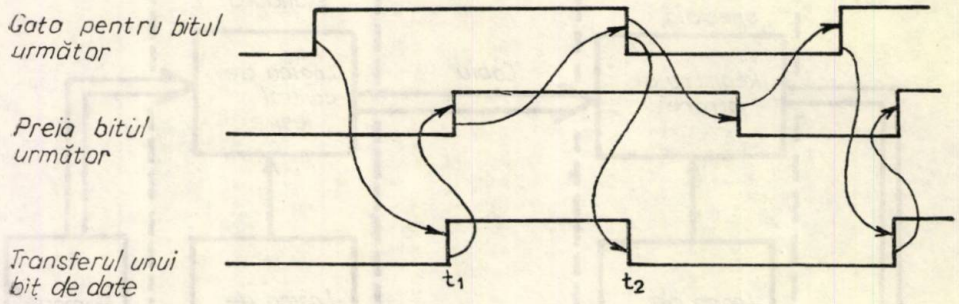
depusă în registrul de ieşire de unde este apoi transferată interfeţei IMP bit cu bit. Transmisia biţilor este asincronă, transferul fiecărui bit, fiind controlat de două semnale „Gata pentru bitul următor" şi „Preia următorul bit".

În reţeaua ARPA se prevăd două proceduri handshake:

a) procedura handskake cu patru traversări de linie (figura 6a).

Partea emiţătoare transmite bitul de date şi apoi pune semnalul („preia bitul următor" pe 1 şi îl transmite părţii receptoare (prima transmisie pe linie). Partea receptoare preia bitul de date şi înştiinţează partea emiţătoare prin aducerea la zero a semnalului „Gata pentru bitul următor" (a doua traversare a liniei). Partea emiţătoare răspunde prin aducerea la zero a semnalului „Preia bitul următor" (a treia traversare a linei) şi apoi partea receptoare pune semnalul „Gata pentru bitul următor" pe 1, care va înştiinţa partea emiţătoare (a patra traversare a liniei) că poate transmite bitul următor.

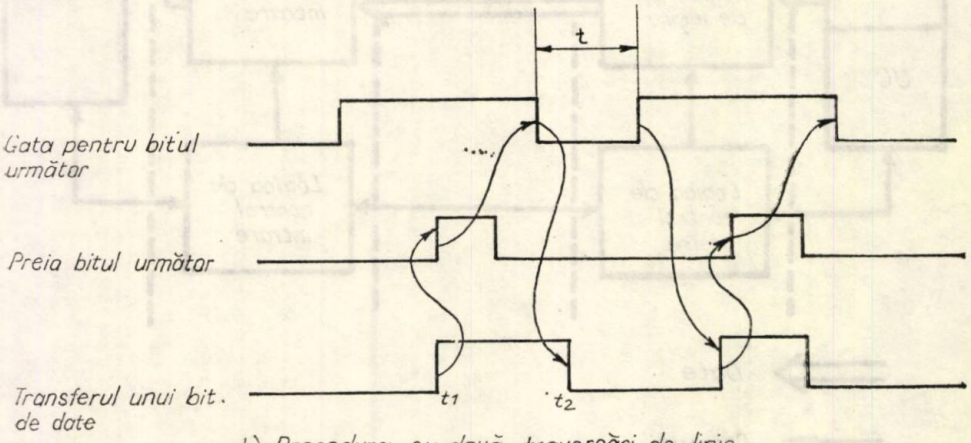
b) Procedura handshake cu două traversări de linie (figura 6b).



t_1 = Momentul transmiterii unui bit de informaţie de către partea emiţătoare.

t_2 = Momentul recepţiei unui bit de date de către partea receptoare.

a) Procedura cu patru traversări de linie



b) Procedura cu două traversări de linie

Fig. 6

Partea emițătoare transmite bitul de date și apoi pune semnalul: „Preia bitul următor" pe 1, care este transmis părții receptoare (prima traversare de linie). Partea receptoare preia bitul de date și înștiințează partea emițătoare prin aducerea la zero a semnalului „Gata pentru următorul bit" (a doua traversare a liniei). Apoi în loc de a aștepta propagarea acestuia la partea emițătoare și propagarea căderii semnalului „Preia bitul următor" de la partea emițătoare la cea receptoare, partea receptoare menține semnalul „Gata pentru bitul următor" în starea zero pentru un timp scurt t și apoi îl pune în starea 1.

Această procedură este simplă și mai ușor de implementat decît prima. Are însă două dezavantaje față de prima:

1) Dacă semnalul „Gata pentru bitul următor" este menținut în starea zero pentru un interval prea scurt de timp astfel că IMP-ul nu observă, acesta va continua să aștepte ca partea receptoare să preia bitul de informație transmis.

2) Dacă partea receptoare pune la zero semnalul „Gata pentru bitul următor" înainte ca semnalul „Preia bitul următor" să fie adus la zero, atunci partea receptoare poate lua datele de pe linie ca fiind bitul următor deși acesta nu a fost încă transmis. Sfîrșitul de mesaj este indicat prin semnalul „Ultimul bit".

Avantajul interfeței din rețeaua ARPA în comparație cu interfața din rețeaua KUIPNET constă în faptul că asigură o probabilitate mai mică de eroare, făcînd confirmarea fiecărui bit. Dezavantajul constă în micșorarea vitezei de transfer, în KUIPNET fiind 1 M bit/sec, iar în ARPA 100 K biți/sec. Observăm că procedura handshake cu patru traversări de linie din ARPA micșorează viteza de transfer de patru ori neglijînd timpul de prelucrare. Printr-o bună proiectare este posibil să se asigure că nu se pierde niciun bit de informație la partea receptoare într-o interfață de tip KUIPNET, deci procentul de erori va fi foarte mic.

Un alt avantaj al interfeței din KUIPNET față de interfața din ARPA este faptul că necesită doar patru fire în loc de 12 [1], și cum cablul de legătură este relativ costisitor rezultă un cost redus.

În rețeaua KUIPNET, în structura interfeței CPD, doar Controlorul intrare/ieșire depinde de tipul calculatorului pe cînd în rețeaua ARPA, întreaga structură a interfeței HOST specială depinde de tipul calculatorului HOST.

4. INTERFAȚA SOFTWARE

Pentru conectarea unui calculator la o rețea de calculatoare cu înmagazinare și înaintare, este necesar:

a) să se facă o interfață bidirecțională, asincronă, cu transmisie serie între un calculator și un nod de comunicație;

b) să se scrie un program de control al rețelei (PC)

c) să se codifice anumite programe orientate pe funcțiuni speciale pentru a oferi servicii pentru rețea prin legăturile de comunicație PC [13] — [16].

Funcțiunile PC-ului constau în definirea unei interfețe comune între diverse sisteme de operare și procesele de nivel utilizator, definirea modului de comunicare între sistemele de operare, definirea informațiilor de control

necesare pentru stabilirea, întreținerea și terminarea comunicațiilor între procesele utilizator. Fiecare PC este astfel conceput încît să poată întreține simultan mai multe conversații independente, fiecare implicînd un program în calculatorul său și un alt program în oricare calculator din rețea.

PC are cîteva rutine, care fac operațiile de intrare/ieșire de la/către interfața CPD și astfel realizează și transmiterea datelor de la/la nod [16].

Există diferite concepții privind implementarea PC-ului. Poate fi implementat ca o parte componentă a sistemului de operare sau poate fi implementat ca un program utilizator. În orice caz PC este singurul task în interiorul sistemului, care are acces la interfața CPD. Deoarece PC-ul nu concurează cu alte taskuri pentru folosirea acestor dispozitive, PC nu necesită planificarea operațiilor de intrare/ieșire de către sistemul de operare. Prin urmare, PC execută direct operații de intrare/ieșire la interfața CPD, figura 7.

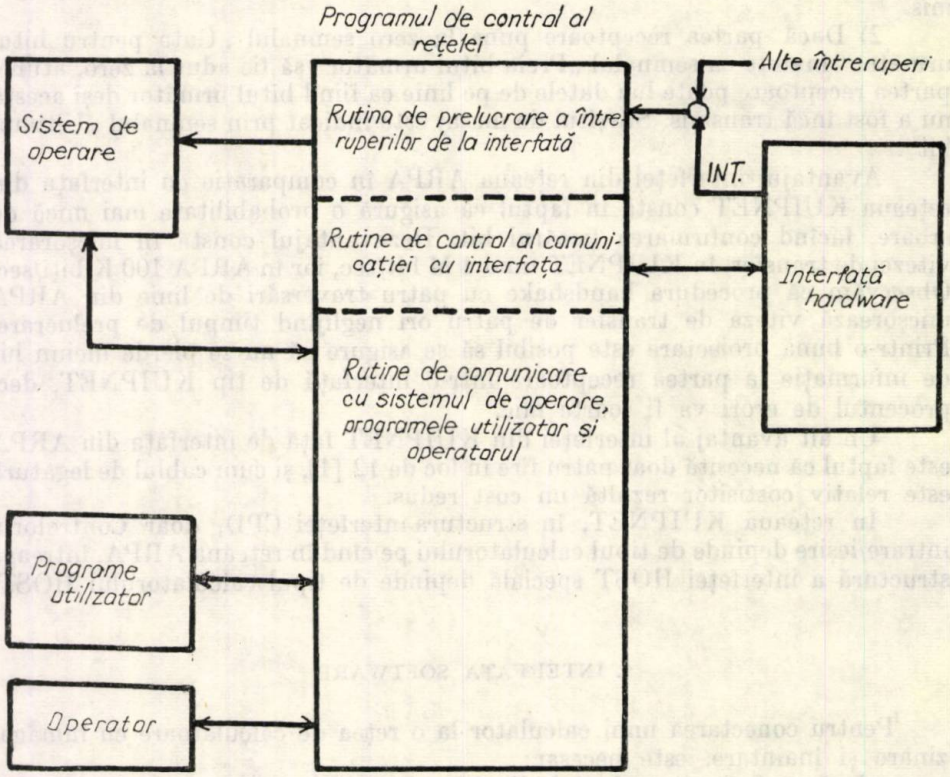

Programul de control al rețelei
Alte întreruperi
Sistem de operare
Rutina de prelucrare a întreruperilor de la interfață
INT.
Rutine de control al comunicației cu interfața
Interfață hardware
Rutine de comunicare cu sistemul de operare, programele utilizator și operatorul
Programe utilizator
Operator

Fig. 7

Cînd interfața CPD primește un semnal de control START, READY sau END de la nod, se produce o întrerupere a sistemului CPD. Aceste întreruperi sînt prelucrate de către PC, care are cea mai mare prioritate de prelucrare a întreruperilor. În această stare, examinează fiecare întrerupere de intrare/ieșire care are loc, reținînd și prelucrînd pe cele care i se adresează

și redînd pentru prelucrare sistemului de operare pe celelalte. Prelucrarea în felul acesta a întreruperilor de intrare/ieșire are următoarele avantaje:

1) nu necesită intervenția sistemului de operare;

2) este eficient, deoarece fiind condus direct de către întreruperi și necerînd dispecerarea unui task la completarea acestei operații, intrările pot fi prelucrate repede, iar o operație de ieșire poate fi inițiată de îndată ce s-a primit întreruperea corespunzătoare operației de ieșire anterioare.

5. TRANSFERUL UNUI MESAJ DE LA CPD LA NOD

Mesajele transmise de la CPD la nod și de la nod la CPD pot fi clasificate: mesaje utilizator, comenzi de control PC și mesaje neregulate [16].

PC are un punctator, care indică dacă bufferul PC este ocupat sau liber. Prima operație este punerea acestui punctator în starea care arată că bufferul PC este ocupat. După aceea PC-ul inițiază transferul mesajului transmițînd interfeței hardware CPD adresa inițială a mesajului în memoria CPD-ului și lungimea acestuia (în cuvinte). Acestea sînt transmise prin excutarea unor operații de ieșire.

PC instruiește interfața hardware să transmită nodului semnalul de control START, apoi PC-ul iese din execuție și controlul este dat sistemului de operare. Apoi, un alt task poate intra în execuție sau monitorul execută o buclă de așteptare. La sosirea semnalului READY are loc o întrerupere, PC este pus în execuție și examinează cuvîntul de stare pentru a vedea ce întrerupere a avut loc și după ce găsește întreruperea READY, instruiește interfața hardware pentru a începe transmisia mesajului. La sfîrșitul transmisiei mesajului are loc o întrerupere de sfîrșit de mesaj, PC reintră în execuție și instruiește interfața hardware să transmită semnalul de control END la nod. Apoi, punctatorul PC-ului este adus în starea care arată că bufferul este liber, astfel că PC poate depune un alt mesaj în acel buffer și iniția procedura de transfer a mesajului atunci cînd i se cere de către un program utilizator. După aceea, controlul este redat monitorului.

6. TRANSFERUL UNUI MESAJ DE LA NOD LA CPD

În această secțiune, prezentăm doar operațiile executate de sistemul de operare, PC și interfața hardware ale CPD-ului pentru recepția unui mesaj de la nod. Nodul efectuează operații similare celor descrise în secțiunea 5 pentru a transmite un mesaj la un CPD conectat direct la el.

Cînd interfața hardware CPD primește semnalul de control START venit de la nod, are loc o întrerupere, PC-ul intră în execuție și face un test pentru a vedea dacă s-au transmis simultan semnale START de CPD și nod. Dacă se găsește că s-a transmis START simultan, PC-ul redă controlul sistemului de operare deoarece CPD-ul are prioritate asupra nodului în transmiterea mesajului. Prin urmare, CPD-ul nu răspunde cu semnalul READY și așteaptă ca acesta să vină de la nod pentru a putea începe transmiterea mesajului său. Dacă nu este START simultan și dacă bufferul PC este ocupat,

CPD nu poate recepționa mesajul de la nod și semnalul de control READY nu este transmis la nod. Dacă bufferul PC este liber, PC face pregătirile pentru recepția mesajului de la nod. Astfel, punctatorul său este pus ca să indice că bufferul PC este ocupat, transmite interfeței hardware CPD adresa inițială și lungimea bufferului. Apoi PC iese din execuție și controlorul este dat sistemului de operare.

După sosirea semnalului de control READY nodul transmite mesajul, care este depus automat în memoria CPD la adresa la care interfața hardware CPD a fost înștiințată anterior.

La sfîrșitul transmisiei sosește semnalul de control END, care provoacă o întrerupere a CPD-ului. PC intră în execuție și examinează mesajul sosit.

7. CONCLUZII

Pentru conectarea unui calculator la o rețea de comunicație este necesar să se facă o interfață hardware și software cu calculatorul de comunicație din nodul rețelei și de asemenea să se facă un modul software care să coordoneze comunicarea calculatorului respectiv cu alte calculatoare din rețea.

Acest articol prezintă interfața hardware și software. După prezentarea conceptului de interfață se prezintă cîteva structuri de interfață cu dezavantajele și avantajele fiecăreia. Structura interfeței este descrisă fără a face referiri la un anumit tip de calculator și de asemenea se are în vedere posibilitatea de a conecta la aceeași rețea calculatoare de diverse tipuri.

Pentru a putea conecta calculatoare cu diverse lungimi de cuvînt, transferul informației se face în serie, iar pentru coordonarea proceselor asincrone executate de partea receptoare și transmițătoare se folosește o procedură „handshake".

BIBLIOGRAFIE

1. * * * : AFIPS Spring Joint Computer Conference Proceedings. vol. 36, pp. 543—597, 1970; vol. 40, 1972, pp. 243—298.
2. BARCHANSKI, J. A., STĂICUȚ, E.: *General Aspects of Computer Networks* Podstawy Sterowania, Tom. 5, no. 3, pp. 269—284, 1975.
3. SAKAI T. et al.: *Inhouse Computer Network for Information Processing and some Applications.* Seminar in Computer Assisted Chemical Research Design, Honolulu, U.S.A.
4. SAKAI, T., et al.: *About KUIPNET — An Inhouse Computer Network.* Technical Report of the Professional Group on Electronics Computers of the IECEJ, EC 73—53,
5. OHNISHI, H.: *Inhouse Computer Network and its Software.* Thesis for the MSc. degree of the Dept. of Information Science, Kyoto University, March 1974.
6. SAKAI T. et al.: *Inhouse Computer Network KUIPNET for Information Processing.* PACNET Symposium, Sendai, Japan, August 20—22, 1975.
7. DAVIES, D. W., BARBER, D.L.A.: *Communication Networks for Computers.* John Wiley & Sons Ltd., 1973.
8. * * * : *BBN Report 1822*, U.S.A.
9. * * *: *British Standard 4421.* British Standards Institutions, British Standard House, 2 Park Street, London Wl.
10. DAVIES, D.W.: *Communication Networks to Serve Rapid-Response Computers.* Proc. IFIP Congress, Edimburg, pp. 650—658, 1968.

11. FRASER, A.G.: *On the Interface Between Computers and Data Communications Systems.* Communications of the ACM, vol. 15, no. 7, pp. 566—573, 1972.
12. FRASER, A. G.: *Spider—A Data Comunication Experiment.* Computing Science Technical Report 23, Bell Laboratories, USA.
13. BARCHANSKI, J.A., SAKAI T., STĂICUȚ, E., HAYASHI, T.: *User Level Protocols for the KUIPNET.* Pacific Area Computer Nework (PACNET) Symposium, Sendai, Japan, August 20—22, 1975.
14. STĂICUȚ, E., BARCHANSKI, J.A.: *Specifications and User's Manuals for MELCOM 70 TELNET and FTP, MACC 7/F TELNET and FTP, MACC 7/F Picture Access and Transfer Protocol.* Internal Reports, Sakai Laboratory, Dept. of Information Science, Kyoto University, Japan.
15. BARCHANSKI, J.A., STĂICUȚ, E.: *Interfacing and Protocols for a Computer Network.* Podstawy Sterowania, Tom. 6, nr. 1, pp. 103—116, 1976.
16. BARCHANSKI, J.A., STĂICUȚ, E.: *On Implementation of the Network Control Program for a Computer Network.* Podstawy Sterowania, nr. 4, 1976.
17. IWAMA, K.: *A Two-Input/Output-Pair Automata and Its Applications to the Design of Computer Connections.* Master Thesis of the Dept. of Information Science, Kyoto Univ. Japan, 1975.

1.06.1976

J. Lifermann

SYSTEMES LINEAIRES. VARIABLES D'ETAT

(Sisteme liniare şi variabile de stare)

Masson et Cie éditeurs, Paris

Teoria sistemelor este disciplina care are drept obiect de studiu analiza şi sinteza sistemelor. Ea utilizează două metode de bază: metoda funcţiilor de transfer şi metoda variabilelor de stare.

Prima metodă, bine fundamentată şi utilizată pe scară largă, nu ia în considerare decît mărimile de intrare în sistem şi mărimile de ieşire din sistem. Acest lucru ne conduce la concluzia că, de fapt, nu se studiază sistemul ca atare, ci răspunsurile sistemului la excitaţiile mediului. Aplicată sistemelor liniare şi invariante, această metodă este foarte indicată. Din păcate, ea nu convine sistemelor variabile (dinamice) şi cu atît mai puţin sistemelor neliniare.

Cum aceste două feluri de sisteme (liniare şi neliniare) sînt folosite pe scară largă, trebuie folosită şi metoda funcţiilor de transfer, prin care se substituie sistemul printr-o serie de variabile de stare, ceea ce permite studiul transformărilor petrecute în interiorul sistemului — sensibilitate, stabilitate, control, optimalitate etc.

Datorită posibilităţii folosirii puternicelor sisteme de calcul — calculatoare electronice — metoda variabilelor de stare a pătruns rapid în numeroase domenii, printre care enumerăm automatica, informatica ş.a.

Prima parte a lucrării constituie de fapt o monografie în care se prezintă principiile metodei variabilelor de stare într-un mod care permite cititorului să abordeze în continuare, studiul lucrărilor de specialitate.

Pentru uşurarea expunerii pe tot parcursul lucrării, autorul se limitează la o singură clasă de sisteme: sisteme cu funcţionare continuă, în regim determinist şi cu parametrii localizaţi.

Exemplele folosite sînt „împrumutate" din domeniul circuitelor electrice pentru că ele sînt sistemele cele mai cunoscute şi folosite.

Se abordează, de asemenea şi principiile metodei funcţiilor de transfer care permite înţelegerea mai bună, prin comparaţie, a „metodei stărilor".

Lucrarea se termină printr-o serie de anexe foarte utile reamintirii noţiunilor matematice esenţiale necesare înţelegerii expunerii. Aceste anexe se referă la transformata Laplace, noţiunea de convoluţie, matrice şi forme cuadratice.

Această lucrare este recomandabilă pentru toţi cei ce se ocupă cu studiul sistemelor.

C. Hârtu

FL. BOIAN
Centrul de calcul al
Univ. Babeş-Bolyai
Cluj-Napoca

Metoda reducerii şi marcajelor pentru rezolvarea problemei transporturilor

În cele ce urmează vom prezenta o metodă de rezolvare a problemei transporturilor care reprezintă o generalizare a algoritmului lui Egervary prezentat printre altele în [1], [2]. *Modificările esenţiale şi completările aduse acestui algoritm au fost posibile datorită introducerii unui proces de marcare a liniilor şi coloanelor similar cu cel prezentat în* [3]. *După ce se prezintă modelul matematic al problemei de transport şi se defineşte noţiunea de reducere, este prezentată metoda reducerii şi marcajelor pentru rezolvarea acestei probleme. Prezentarea este amănunţită pentru a uşura programarea ei la calculator, iar comentariile ce însoţesc fiecare pas vor facilita însuşirea metodei.*

1. NOŢIUNI PRELIMINARE

După cum este cunoscut, o problemă de transport se formulează astfel:

Presupunem m surse de produse (depozite, fabrici). Sursa i poate depozita (produce) a_i unităţi de produs ($i = 1, ..., m$).

Presupunem n destinaţii de produse (magazine de desfacere etc.).

Destinaţia j solicită b_j unităţi de produs ($j = 1, n$).

Notăm cu c_{ij} costul unitar de transport de la sursa i la destinaţia j, iar prin x_{ij} — numărul de unităţi de produs ce se transportă de la sursa i la destinaţia j.

Să se determine un plan de transport x_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ care să satisfacă:

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, n$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

În cele ce urmează vom considera că problema de transport este echilibrată:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = E \text{ (condiția de echilibru).}$$

Există metode prin care orice problemă poate fi transformată într-o problemă echilibrată.

Definiție. Fie v_i $(i = 1, m)$, v_j $(j = 1, n)$ numere reale. Vom spune că o matrice $C' = (c'_{ij})$ este *redusa* matricii costurilor unitare $C = (c_{ij})_{j=1,n}^{i=1,m}$ cu elementele v_i și v_j dacă:

$$c'_{ij} = c_{ij} - v_i - v_j.$$

Este ușor de arătat că problemele cu costurile c_{ij} și c'_{ij} sînt echivalente. În [1] este demonstrat acest lucru.

Echivalența se păstrează și dacă se efectuează un număr finit (oarecare) de reduceri. Această observație este esențială, atît pentru algoritmul lui Egervary, cît și pentru metoda prezentată în cele ce urmează.

2. METODA REDUCERII ȘI MARCAJELOR

Pentru aplicarea metodei, pe lîngă datele problemei, mai sînt necesari doi vectori coloană și doi vectori linie ce vor fi atașați problemei în tot cursul rezolvării.

$LL(i)$ $i = 1,m$ vector lipsă linie ($LL(i) = 0$ linia i saturată)

$ML(i)$ $i = 1,m$ vector marcaj linie ($ML(i) = 0$ linia i nemarcată)

$LC(j)$ $j = 1,n$ vector lipsă coloană ($LC(j) = 0$ coloana j saturată)

$MC(j)$ $j = 1,n$ vector marcaj coloană ($MC(j) = 0$ coloana j nemarcată).

În matricea X vom defini o „selecție" astfel:

Celula (i, j) este din „selecție" $\Leftrightarrow c_{ij} = 0$.

Cu convenția ca simbolul: $=$ să însemne atribuire, prezentăm mai jos pașii de rezolvare.

Pasul 0. Inițializarea.

$LL(i) := a_i$; $LC(j) := b_j$; $c_{ij}^{(0)} := c_{ij}$; $x_{ij}^{(1,0)} := 0$ pentru $i = 1, m$ și $j = 1, n$. $\alpha := 2$; $\beta := 0$; $\text{COST}^{(0)} := 0$. Se trece la pasul I.

Pasul I. Scăderea minimelor.

1° $c_{ij}^{(1)} := c_{ij}^{(0)} - \underset{j=1,n}{min}\ \{c_{ij}^{(0)}\}\ (i = 1,\ m)$ $COST^{(1)} := COST^{(0)} +$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \underset{j=1,\,n}{min}\ \{c_{ij}^{(0)}\} \cdot LL(i).$$

Se observă că acest pas este o reducere: $u_i^{(0)} = \underset{j=1,n}{min}\ \{c_{ij}^{(0)}\}$ şi $v_j^{(0)} = 0$.

2° $c_{ij}^{(2)} := c_{ij}^{(1)} - \underset{i=1,m}{min}\ \{c_{ij}^{(1)}\}\ (j = 1,\ n)$ $COST^{(2)} := COST^{(1)} +$

$+ \sum_{j=1}^{n} \underset{i=1,\,m}{min}\ \{c_{ij}^{(1)}\} \cdot LC(j)$ şi aici avem o reducere: $u_i^{(1)} = 0$ $v_j^{(1)} = \underset{i=1,m}{min}\ \{c_{ij}^{(1)}\}$.

În acest pas elementul minim de pe o linie a matricii de costuri se scade din fiecare element al liniei. Din noua matrice obţinută elementul minim de pe o coloană se scade din toate elementele coloanei după care se trece la pasul II.

Pasul II. Afectarea superficial-maximală.

Pentru $i = 1,m$ şi $j = 1,n$:

1° Dacă $c_{ij}^{(\alpha)} = 0$ şi $x_{ij}^{(\alpha-1,\,\beta)} = 0$ şi $LL(i) > 0$ şi $LC(j) > 0$

atunci:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(\alpha,\,0)} := min\ \{LL(i),\ LC(j)\} \\ LL(i) := LL(i) - x_{ij}^{(\alpha,\,0)} \\ LC(j) := LC(j) - x_{ij}^{(\alpha,\,0)}\ ; \end{cases}$$

2° Dacă $C_{ij}^{(\alpha)} \neq 0$ sau $x_{ij}^{(\alpha=1,\,(\beta} \neq 0$ sau $LL(i) = 0$ sau $LC(j) = 0$,

atunci:

$$x_{ij}^{(\alpha,\,0)} := x^{(\alpha-1,\,\beta)}.$$

Acest pas se poate interpreta ca şi o tehnică Nord-Vest, dar se vor lua în considerare doar celulele din „selecţie", ce au $x_{ij}^{(\alpha-1,\,\beta)} = 0$. În general nu se obţine o soluţie admisibilă!

La terminarea pasului $\beta := 0$ şi se trece la pasul III.

Pasul III. Marcarea liniilor şi coloanelor.

1° $ML(i) := 0 \quad i = 1,m$ şi $MC(j) := 0 \quad j = 1,n$.

Se şterg toate marcajele vechi;

2° Dacă $C_{ij}^{(\alpha)} = 0$, $LC(j) > 0$ şi $ML(i) = 0$, atunci $ML(i) := j$. Dacă linia este nemarcată şi celulele din „selecţie" au coloana nesaturată, ea va primi ca marcaj indicele coloanei respective.

3° Dacă $C_{ij}^{(\alpha)} = 0$, $x_{ij}^{(\alpha,\beta)} > 0$ şi $ML(i) > 0$, $MC(j) = 0$, atunci $MC(j) = i$. Dacă coloana este nemarcată şi celulele din „selecţie" au conţinut nenul şi linia marcată, ea va primi ca marcaj indicele liniei.

4° Dacă $C_{ij}^{(\alpha)} = 0$ şi $MC(j) > 0$ şi $ML(i) = 0$, atunci $ML(i) := j$. Dacă linia este nemarcată şi celulele din „selecţie" au coloana marcată, linia se marchează cu indicele coloanei.

Se repetă alternativ paşii III 3° şi III 4° cît timp marcarea este posibilă (procesul este evident finit), după care se trece la pasul IV.

În procesul de marcare trebuie respectată o ordine. De exemplu, marcarea cu cel mai mic indice găsit.

Este cel mai important pas al metodei. Marcajele vor folosi efectiv în toţi paşii următori.

Pasul IV. Găsirea unui început de drum.

1° Dacă $LL(i) = 0$, $i = \overline{1,m}$, atunci, $X = (x_{ij}^{(\alpha,\beta)})_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ este soluţia optimă a problemei, iar $\text{COST}^{(\alpha)}$ este costul total al transportului.

2° Dacă $\forall_i$ pentru care $LL(i) > 0$ şi $\forall_i$ pentru care $c_{ij}^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow MC(j) = 0$, atunci se trece la pasul VI.

3° Dacă există (i_0, j_0) ce satisface $LL(i_0) > 0$ şi $c_{i_0 j_0}^{(\alpha)} = 0$ şi $MC(j_0) > 0$, atunci celula (i_0, j_0) reprezintă un început de drum. Se trece la pasul V.

Pasul IV este pas de ramificare. Se caută o linie nesaturată ce are o celulă din „selecţie" cu coloana marcată. Se vor deosebi cele trei cazuri de mai sus.

Pasul V. Drumul şi îmbunătăţirea.

Fie şirurile: $i_{k+1} = MC(j_k)$ şi $j_k = ML(i_k)$. Acestea determină drumul Γ

$$\Gamma = (i_0, j_0)(i_1, j_0)(i_1, j_1)(i_2, j_1) \dots (i_l, j_{l-1})(i_l, j_l)$$

unde l este cel mai mic indice pentru care $LC(j_l) > 0$.

Fie $\Gamma^+ = (i_0, j_0)(i_1, j_1) \dots (i_{l-1}, j_{l-1})(i_l, j_l)$ şi

$\Gamma^- = (i_1, j_0)(i_2, j_1) \dots (i_l, j_{l-1})$.

Fie $\Theta = min\ \{LL(i_0),\ min\ \{x_{ij}^{(\alpha,\beta)} \mid (i, j) \in \Gamma^-\},\ LC(j_l)\}$.

Atunci:

1° $x_{ij}^{(\alpha,\beta+1)} := x_{ij}^{(\alpha,\beta)} + \theta$ $\quad (i, j) \in \Gamma^+$

2° $x_{ij}^{(\alpha,\beta+1)} := x_{ij} - \theta$ $\quad (i, j) \in \Gamma^-$

3° $x_{ij}^{(\alpha,\beta+1)} := x_{ij}^{(\alpha,\beta)}$ $\quad (i, j) \notin \Gamma$

4° $LL(i_0) := LL(i_0) - \theta$

5° $LC(j_l) := LC(j_l) - \theta$.

Se pune $\beta := \beta + 1$ şi salt la pasul III.

De-a lungul drumului, Γ se îmbunătăţeşte cu θ afectarea superficial-maximală existentă. Respectarea ordinei cerute la pasul III asigură că drumul Γ este finit.

Pasul VI. Acoperirea minimă şi reducerea lui C.

Fie mulţimile de indici

$$I = \{i \mid ML(i) > 0\} \text{ şi}$$

$$J = \{j \mid MC(j) = 0 \text{ şi } LC(j) = 0\}.$$

Fie $\varepsilon^{(\alpha)} = min\ \{c_{ij}^{(\alpha)} \mid i \notin I \text{ şi } j \notin J\}$.

Fie

$$u_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & i \in I \\ \varepsilon^{(\alpha)} & i \notin I \end{cases} \quad \text{şi} \quad v_j^{(\alpha)} = \begin{cases} -\varepsilon^{(\alpha)} & j \in J \\ 0 & j \notin J \end{cases}.$$

Atunci:

1° $c_{ij}^{(\alpha+1)} := c_{ij}^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)} - v_j^{(\alpha)}$

2° $\text{COST}^{(\alpha+1)} := \text{COST}^{(\alpha)} + \varepsilon^{(\alpha)} \cdot \sum_{i=1}^{m} LL(i)$.

Se pune $\alpha := \alpha + 1$ şi salt la pasul II, care este un pas de reducere. Acoperirea este dată de I şi J. Se găseşte elementul minim neacoperit ce se scade din toate elementele neacoperite şi se adună cu cele de la intersecţia de acoperiri. Este pasul iterativ folosit în algoritmul lui Egervary.

3. EXEMPLU DE REZOLVARE

Considerăm problema de transport:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

În matricile X şi vectorii de marcaje spaţiile vor fi considerate zerouri, iar celulele din „selecţie" în X vor fi încadrate.

Iniţializare: $\text{COST}^{(0)} = 0$.

$$X^{(1,0)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & LL \\ \hline & & & & 3 \\ \hline & & & & 5 \\ \hline & & & & 8 \\ \hline LC = & 4 & 2 & 7 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad C^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Pasul I 1°.

$u_1^{(0)} = 2\ u_2^{(0)} = 1\ u_3^{(0)} = 4.\ \text{COST}^{(1)} = \text{COST}^{(0)} + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 8 = 43;$

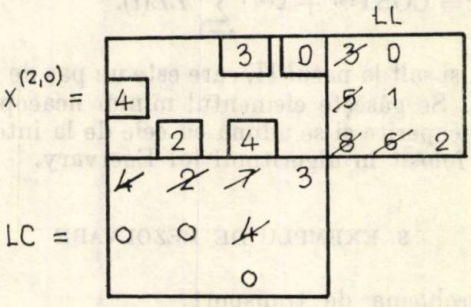
$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Pasul I 2°

$v_1^{(1)} = 0\ v_2^{(1)} = 0\ v_3^{(1)} = 2\ v_4^{(1)} = 0\ \text{COST}^{(2)} = \text{COST}^{(1)} + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 3 = 57;$

$$C^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pasul II.

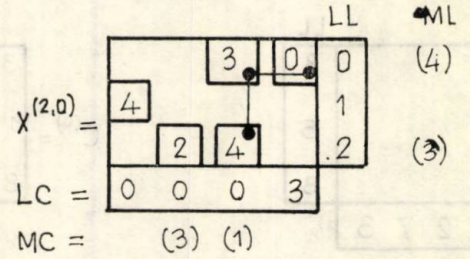


Este evident cum se execută acest pas.

Pasul III.

— Nu există marcaje
— Celula (1,4), coloana 4 și linia 1 satisfac III 2° deci $ML(1) = 4$
— Celula (1,3), linia 1 și coloana 3 satisfac III 3° deci $MC(3) = 1$
— Celula (3,3), coloana 3 și linia 3 satisfac III 4° deci $ML(3) = 3$
— Celula (3,2), linia 3 și coloana 2 satisfac III 3° deci $MC(2) = 3$.

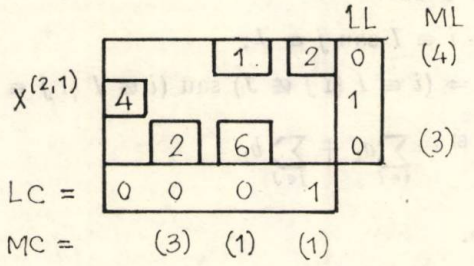
Se observă că marcarea nu se mai poate continua. Salt la IV.



Pasul IV. Se observă că celula (3,3) este un început de drum.

Pasul V. $\Gamma = (3,3)(1,3)(1,4)$ $\theta = min\ \{2,\ 3,\ 3\} = 2.$

După efectuare se obține:



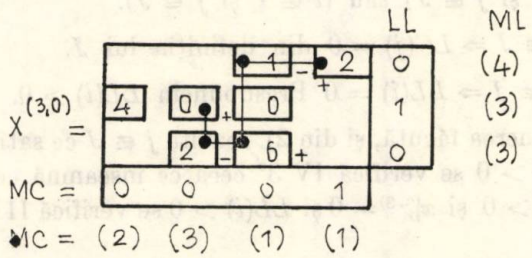
Reluînd, se obține marcarea de mai sus unde nu există început de drum. Soluția nu este admisibilă și se trece la:

Pasul VI. Acoperirea este trasată pe matricea $C^{(2)}$.

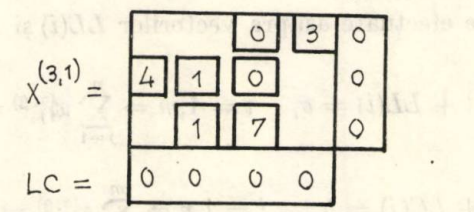
$I = \{1,3\}$ $J = \{1\}$ $\varepsilon^{(2)} = 2$ $COST^{(3)} = COST^{(2)} + 2 \cdot 1 = 59.$

$$C^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Reluînd de la pasul II, vedem că acesta nu modifică nimic în $X^{(3,0)}$, iar după marcare se obține:



$\Gamma = (2,2)\ (3,2)\ (3,3)\ (1,3)\ (1,4)$ $\theta = min\ \{1,2,\ 1,1\} = 1$ și se obține:



care este deci soluția optimă, iar costul total al transportului este $COST^{(3)} = 59.$

TEOREMA 1 (De acoperire). Considerăm matricile $C^{(\alpha)}$ şi $X^{(\alpha,\beta)}$ existente într-o situaţie cînd IV 2° este îndeplinit. Fie I şi J definiţi în pasul VI. În aceste condiţii avem:

1) $c_{ij}^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow i \in I$ sau $j \in J$;

2) $x_{ij}^{(\alpha,\beta)} > 0 \Rightarrow (i \in I$ şi $j \notin J)$ sau $(i \notin I$ şi $j \in J)$;

3) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in J} b_j$.

Demonstraţie.

1) Presupunem $c_{ij}^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow i \notin I$ şi $j \notin J$

$$j \notin J \Rightarrow MC(j) > 0 \text{ sau } LC(j) > 0.$$

Dacă $LC(j) > 0$ din III 2° $\Rightarrow ML(i) > 0 \Rightarrow i \in I$ ceea ce este o contradicţie. Dacă $MC(j) > 0$ din III 4° $\Rightarrow$ linia i se poate marca. Deci procesul de marcare este neterminat, ceea ce este de asemenea o contradicţie.

Cele două contradicţii arată că presupunerea făcută este falsă. Deci $i \in I$ sau $j \in J$.

2) $x_{ij}^{(\alpha,\beta)} > 0$ din II 1° $\Rightarrow c_{ij}^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow i \in I$ sau $j \in J$. Presupunem $i \in I$ şi $i \in J$. $i \in I \Rightarrow ML(i) > 0$ şi $x_{ij}^{(\alpha,\beta)} > 0$ din ipoteză şi $MC(j) = 0$ din definiţia lui J; deci se verifică III 3° ceea ce înseamnă contradicţie (marcare neterminată).

Deci $(i \in I$ şi $j \notin J)$ sau $(i \notin I$ şi $j \in J)$.

3) Dacă $j \in J \Rightarrow LC(j) = 0$ din definiţia lui J.

$$i \in I \Rightarrow LL(i) = 0 \text{ Presupunem } LL(i) > 0.$$

Din presupunerea făcută, şi din 2), rezultă $j \notin J$ ce satisface $c_{ij}^{(\alpha)} = 0$.

Dacă $MC(j) > 0$ se verifică IV 3° ceea ce înseamnă contradicţie.

Dacă $LC(j) > 0$ şi $x_{ij}^{(\alpha,\beta)} = 0$ şi $LL(i) > 0$ se verifică II 1°; de asemenea contradicţie.

Dacă $LC(j) > 0$ şi $x_{ij}^{(\alpha,\beta)} = 0$ şi $MC(j) = 0$ se verifică III 3° deci contradicţie.

Dacă $i \in I \Rightarrow LL(i) = 0$.

Din operaţiile efectuate asupra vectorilor $LL(i)$ şi $LC(j)$ se observă că:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} + LL(i) = a_i \quad i = \overline{1,m} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} = a_i \quad i \in I$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} + LC(j) = b_j \quad j = \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} = b_j \quad j \in J$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i\in I}\sum_{j=I}^{n} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} + \sum_{j\in J}\sum_{j\notin I} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} + \sum_{j\notin J}\sum_{i\notin I} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} =$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} + \sum_{j\in J}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} + 0 = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in J} b_j \quad \text{c.c.t.d.}$$

Înlocuirile sînt posibile datorită proprietății 2) precum și din observațiile făcute mai sus.

TEOREMA 2. (De monotonie și calculul costului).
Considerăm $C^{(\alpha)}$, $x_{ij}^{(\alpha,\beta)}$ într-o situație cînd este îndeplinit IV 2°.
Fie I, J definiți în VI, fie $C^{(\alpha+1)}$ redusa matricii $C^{(\alpha)}$ în VI și x_{ij} o soluție *admisibilă* oarecare. În aceste condiții:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\alpha+1)} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\alpha)} x_{ij} = -\varepsilon^{(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} LL(i) \cdot$$

Demonstrație.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\alpha+1)} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\alpha)} x_{ij} = -\sum_{i=1}^{m} u_i a_i - \sum_{j=1}^{n} v_j b_j =$$

(pînă în această etapă a demonstrației se justifică și calculul COST $^{(1)}$ și COST $^{(2)}$ — continuăm demonstrația conform teoremei 1)

$$= \sum_{j\in J} \varepsilon^{(\alpha)} b_j - \sum_{i\notin I} \varepsilon^{(\alpha)} a_i = \varepsilon^{(\alpha)} \left(\sum_{j\in J} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i\in I} a_i\right) =$$

$$= \varepsilon^{(\alpha)} \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} - \sum_{i=1}^{m} a_i\right) = \varepsilon^{(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(\alpha,\beta)} - a_i\right) =$$

$$= -\varepsilon^{(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} LL(i) \quad \text{c.c.t.d.}$$

Această teoremă justifică faptul că ultimul COST$^{(\alpha)}$ este și costul planului optim de transport.

TEOREMA 3. Metoda de convergență.
Teorema 1 asigură că I și J determină o acoperire pentru matricea $C^{(\alpha)}$. Ținînd cont de concluziile 2) și 3) ale teoremei 1 și de noțiunea de hipermatrice atașată unei probleme de transport echilibrată, noțiune definită în [1], se poate arăta că această acoperire este minimă.
Din motive de spațiu renunțăm la această demonstrație.
Deoarece pașii I și VI formează algoritmul lui Egervary (fără căutarea acoperirii minime), această metodă se termină după un număr finit de pași.
Evident că $x_{ij}^{(\alpha,\beta)} > 0 \Rightarrow c_{ij}^{(\alpha)} = 0 \;\forall\; \alpha, \beta$. Acest fapt este valabil și pentru ultima redusă $C^{(\alpha)}$ și ultima $x_{ij}^{(\alpha,\beta)}$. În acest caz $x_{ij}^{(\alpha,\beta)}$ este o soluție admisibilă dar și optimă pentru problema cu costurile $C^{(\alpha)}$ și dacă se ține cont de observația făcută cînd am introdus noțiunea de reducere, această soluție admisibilă este și optimă pentru problema inițială c.c.t.d.

Observația 1. Matricile $C^{(\alpha)}$ și $X^{(\alpha, \beta)}$ pot fi reprezentate într-o singură matrice în care elementele pozitive vor fi considerate ca făcînd parte din $C^{(\alpha)}$, iar cele negative din $X^{(\alpha, \beta)}$.

Într-adevăr, se observă că în procesul de formare a matricii soluție X, $\forall_{\alpha, \beta, i, j} x_{ij}^{(\alpha, \beta)} > 0 \Rightarrow c_{ij}^{(\alpha)} = 0$ și conform teoremei 1 punctul 2 la reducerea din pasul VI, celulele pentru care $x_{ij}^{(\alpha, \beta)} > 0$ nu sînt modificate. Se poate conveni atunci în ceea ce privește conținutul oricărei celule (i, j) $i = 1, m$ $j = 1, n$

conținut $(i, j) \geqslant 0 \Rightarrow x_{ij}^{(\alpha, \beta)} = 0$ și $c_{ij}^{(\alpha)} =$ conținut (i, j)

conținut $(i, j) < 0 \Rightarrow x_{ij}^{(\alpha, \beta)} = -$ conținut (i, j) și $c_{ij}^{(\alpha)} = 0$.

Observația 2. Din considerente de ordin intuitiv și pe baza experiențelor metodei descrise se pot aduce două îmbunătățiri care vor accelera foarte mult convergența, fiind nevoie (în general) de mult mai puține iterații decît dacă se urmărește strict calea descrisă. O argumentare a considerentelor amintite mai sus ar fi prea lungă, ne vom mărgini la stricta prezentare a îmbunătățirilor aduse.

a) În pasul II:

Se va renunța la tehnica N—V. Dintre celulele ce satisfac II 1° se va afecta la acea celulă (i, j) pentru care $x_{ij}^{(\alpha, 0)}$ este cel mai mare, iar în caz că sînt mai multe celule ce au același $x_{ij}^{(\alpha, 0)}$ și este maxim, se alege o celulă pentru care $LL(i) + LC(j)$ este minim.

b) În alegerea din IV 3°:

Dintre liniile ce satisfac IV 3° alegem i_0 pentru care $LL(i_0)$ este maxim. Avînd i_0 ales, alegem j_0 pentru care $MC(j_0) \neq i_0$ și $x_{i_0 j_0}^{(\alpha, \beta)}$ este maxim. (Întotdeauna există j_0 ce satisface $MC(j_0) \neq i_0$. În caz contrar apare contradicția cu pasul II 1°).

Observația 3. Pentru programarea la calculator este necesar un test de echilibru al problemei. Variabilele α și β sînt de prisos (ele marcînd doar iterațiile). Se observă că $LL(i)$ se poate identifica cu a_i și de asemenea $LC(j)$ cu b_j, a_i și b_j neintervenind în procesul de calcul. Deci pasul 0 se poate reduce la: COST := 0.

5. CONCLUZII

În acest paragraf vom compara metoda reducerii și marcajelor cu metoda clasică de rezolvare, metoda potențialelor, și în final vom da cîteva rezultate de calcul.

Pentru prescurtare vom nota cele două metode cu MRM și MP.

a) Ca punct de pornire MRM pleacă de la o soluție neadmisibilă, iar MP de la o soluție admisibilă.

b) Prin MRM prima soluție admisibilă este și optimă deci, fenomenul de degenerare nu influențează rezolvarea problemei. Ca și prin MP soluția optimă obținută prin MRM este tot o soluție de bază. (Se poate arăta că $U_i = \sum_{(\alpha)} u_i^{(\alpha)}$ și $V_j = \sum_{(\alpha)} v_j^{(\alpha)}$ formează un sistem potențial).

c) Determinarea (în special la calculator) a ciclurilor ce apar în MP este deosebit de dificilă, în timp ce determinarea drumurilor în MRM este ușoară, precisă și univocă.

d) MRM face o economie de $m \times n$ celule de memorie. Economia este justificată prin aplicarea observației 1. La MP matricea costurilor și matricea soluției trebuie să existe în același timp în memorie. MRM distruge matricea costurilor, dar dă costul total al transportului.

e) Din punctul de vedere al timpului de calcul (număr de iterații), cîteva rezolvări paralele prin cele două metode au arătat că MRM este mai eficientă decît MP. Sperăm că rezolvarea unui număr mare de probleme luate din practica economică, în paralel prin MRM și MP va confirma cele afirmate mai sus privind eficiența calculului.

Pentru aplicarea cu ajutorul calculatorului FELIX C-256 a MRM s-a întocmit și testat o subrutină TRANCOST în limbajul FORTRAN IV ce conține 214 instrucțiuni. Folosind drept costuri și capacități ale surselor și destinațiilor niște numere aleatoare de patru cifre s-au rezolvat cu TRANCOST 12 probleme de diferite dimensiuni. Pentru o mai bună edificare asupra posibilităților și eficienței MRM, prezentăm mai jos o sinteză a acestor rezultate (timpul de lucru este timpul efectiv, fără afișarea rezultatelor).

Problema	Nr. linii	Nr. coloane	Nr. reduceri	Nr. drumuri	Timp de lucru sec.)
1	21	20	15	6	1,98
2	26	60	13	6	5,13
3	31	30	13	5	3,20
4	31	70	8	6	4,36
5	41	40	17	9	8,21
6	41	50	14	6	6,82
7	51	10	13	4	1,96
8	51	50	14	6	8,35
9	56	45	18	6	12,17
10	61	60	13	6	11,06
11	71	30	13	5	6,88
12	71	70	8	5	9,15

MRM este o metodă ce se poate aplica nu numai problemelor de transport în care criteriul de optimizat este minimalizarea costului total. De exemplu, dacă ne referim la problema cunoscută în literatură sub numele de problema de transport după criteriul timp se poate aplica MRM dacă se modifică pasul I, pasul VI și "selecția". Într-o comunicare viitoare vom prezenta această problemă și rezolvarea ei prin MRM.

BIBLIOGRAFIE

1. EGERVARY I.; *Kombinatorikus módszer a szállitási probléma megoldására.* A Magyar Tudományos Akadémia. Mat. Kut. Int. kóz. IV. 1, (1959) pag. 15—27
2. VAIDA DRAGOȘ.; *Elemente de informatică aplicată.* Cap. 2. pag. 70—80. E.D.P. București, 1968.
3. YASPANA A.: *On finding a maximal assignment.* Operations Research 14, 4 (1966) pag. 646—651.

28.03.1975

Robert G. Murdick, Joel E. Ross

INFORMATION SYSTEMS FOR MODERN MANAGEMENT

(Sisteme informaționale pentru o conducere modernă)

Ediția a II-a, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, 671 p.

Ilustrată cu un însemnat număr de rezolvări ale unor probleme reale de mai mică sau mai mare complexitate, conținînd un mare volum de informații privind modelarea deciziilor de conducere în cazul unor exemple concrete, această carte aflată la a doua ediție revizuită, tratează modul în care pot fi folosite sistemele informaționale și informatice pentru o conducere eficientă.

De mare importanță este „punerea la zi" a cititorului cu schimbările radicale petrecute în teoria și practica de „management" în ultimele două decenii, și mai ales în jurul anului 1970, an de cotitură pentru diversele curente și școli de conducere.

În mod deosebit se remarcă conceptul sistemic de prezentare a cărții.

Fiecare capitol este prevăzut cu o introducere „la obiect" și include recapitulări cu referiri explicite la materialul analizat.

Interesantă este și întrebarea „în text": poate analistul de sisteme să înțeleagă realitatea economică prin canalele de informație existente? Răspunsul la această întrebare este găsit prin studierea legăturilor între management și teoria sistemelor, prin studierea unor cazuri de implementare a sistemelor informaționale de conducere, a conceptelor privind luarea deciziilor precum și a perspectivelor MIS-ului (Management Information System).

De remarcat, este punerea în discuție a bazei fundamentale în construirea sistemelor informatice de conducere: clasificarea sistemelor, concepte, cerințe, sisteme informaționale cu „feedback", procesul de luare a deciziilor, procesul de integrare a subsistemelor avînd ca scop pregătirea informației pentru conducere, calculatorul electronic ca instrument necesar stocării, prelucrării și regăsirii informațiilor în MIS.

Avînd o bună structurare, fiind scrisă clar și concis, identificînd cu acuratețe temele importante ale teoriei conducerii, cartea este un instrument activ de predare/învățare destinat unei categorii largi de cititori: cadre didactice, studenți, cercetători, analiști, cadre de conducere și specialiști din economie.

P. Găvojdea
N. Mihăiță

ОПТИМИЗАЦИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

(Optimizarea şi modelarea sistemelor complexe)

Ed. НАУКА. U.R.S.S. – Alma–Ata, 1976, 172 pp.

Lucrarea este o culegere de articole apărută sub egida Institutului de matematică şi mecanică a Academiei de ştiinţe a R.S.S. Cazahă şi este destinată aplicării metodelor matematice şi a tehnicii de calcul în economie şi în calcule ştiinţifice.

Printre articolele prezentate sînt larg reprezentate metodele aproximative-combinatoriale pentru rezolvarea problemelor de amplasare, precum şi noi direcţii de căutare a optimului pentru mărimi vectoriale.

Sînt introduse de asemenea lucrări referitoare la băncile de date folosite în sistemele de conducere a întreprinderilor industriale, lucrări referitoare la sinteza sistemelor de prelucrare a datelor, articole referitoare la modelarea dinamicii interacţiunii populaţiei precum şi lucrări de teoria grafelor.

Cartea, prin înalta sa ţinută ştiinţifică, se adresează specialiştilor care utilizează tehnica de calcul în domeniul teoriei optimizării şi modelării sistemelor complexe.

R. Şerban

Al III-lea Simpozion de Informatică şi conducere şi EXPRODINF '77

Cluj-Napoca, 11—14 mai 1977

În perioada 11—14 mai 1977 a avut loc la Cluj-Napoca cel de al III-lea Simpozion de Informatică şi conducere, organizat de Centrul teritorial de calcul electronic Cluj, manifestare ştiinţifică, devenită tradiţională, cu profil informatic. Acest simpozion a reunit peste 800 de participanţi din centrele de activitate cu profil informatic din ţară; s-au prezentat şi dezbătut un număr de peste 200 lucrări în plen, pe secţiuni şi la mese rotunde, care au pus în evidenţă problematica vastă şi complexă a informaticii din ţara noastră. Această manifestare a realizat un larg şi util schimb de experienţă între informaticieni, a impulsionat activitatea de informatică şi a contribuit la îmbunătăţirea activităţii de conducere a unităţilor economice din ţara noastră.

Lucrările simpozionului au fost prezentate în cadrul a şase secţiuni:
— Secţiunea I: Subsisteme şi aplicaţii privind producţia;
— Secţiunea a II-a: Tehnici şi metode de analiză şi programare;
— Secţiunea a III-a: Echipamente de calcul şi soft de bază;
— Secţiunea a IV-a: Metode de optimizarea proceselor economice;
— Secţiunea a V-a: Organizare şi conducere;
— Secţiunea a VI-a: Aplicaţii ale informaticii în ştiinţă, tehnică, artă.

Cu ocazia simpozionului a fost deschisă cea de a doua expoziţie de produse informatice EXPRODINF'77, expoziţie care a contribuit la preluarea şi la schimbul direct de informaţii şi programe între centrele de calcul din ţară.

În cadrul simpozionului s-a organizat la Satu Mare, în perioada 16—18 mai 1977, secţiunea de Sisteme cibernetice şi informatică medicală, ca o primă manifestare de acest gen în ţara noastră.

Din partea Catedrei de cibernetică economică din Academia de studii economice Bucureşti au fost prezentate 15 lucrări privind: planificarea la două nivele, programarea operativă a producţiei în industria siderurgică, optimizări în domeniul îmbunătăţirilor funciare, sistem pentru urmărirea investiţiilor, planificarea şi urmărirea reparaţiilor şi aspecte ale utilizării bazelor de date.

În cadrul expoziţiei, Laboratoarele catedrei de cibernetică economică ale Academiei de studii economice Bucureşti au expus un panou cu preocupări în domeniul informaticii şi ciberneticii şi eficienţa unor lucrări executate, precum şi produse informatice realizate.

R. Şerban

CONTENTS

V. DUMITRU
Some Results in Solving Nonlinear Programming Problems on the Computer 5
R. STROE
Dynamics of the Homogenization of the Territorial Development 21
M. ALEXANDRU
Models for Forecasting the Processes in Mining Industry 43
C. BARON
Availability — An Indicator of Products Quality 55
LETIȚIA ZAHIU, V. MANOLE
Optimization of Using the Chemical Fertilizers 69
E. STAICUȚ, A. BARCHANSKI
Considerations on Designing an Interface for Computer Networks 81
FL. BOIAN
Methods of Reducing and Marking in Order to Solve the Transport Problem 95

Critique and Bibliography
Scientific Information

SOMMAIRE

V. DUMITRU
Quelques résultats dans la résolution des problèmes de programmation non-linéaire à l'aide de l'ordinateur 5

R. STROE
La dynamique de l'homogénéité du développement territorial 21

M. ALEXANDRU
Modèles pour la prévisibilité des processus de l'industrie minière 43

C. BARON
La disponibilité — indicateur de la qualité des produits 55

LETIȚIA ZAHIU, V. MANOLE
L'optimisation de l'utilisation des engrais chimiques 69

E. STAICUT, A. BARCHANSKI
Considérations sur la projection d'un interface pour les réseaux d'ordinateurs 81

FL. BOIAN
Méthode de la réduction et des marcages pour la résolution du problème des transports 95

Critique et bibliographie
Informations scientifiques

СОДЕРЖАНИЕ

В. ДУМИТРУ
Некоторые результаты полученные при разрешении задач нелинейного программирования с помощью ЭВМ 5

Р. СТРОЕ
Динамика гомогенизации территориального развития..... 21

М. АЛЕКСАНДРУ
Модели для прогнозирования процессов в горной промышленности 43

К. БАРОН
Наличие — показатель качества изделий 55

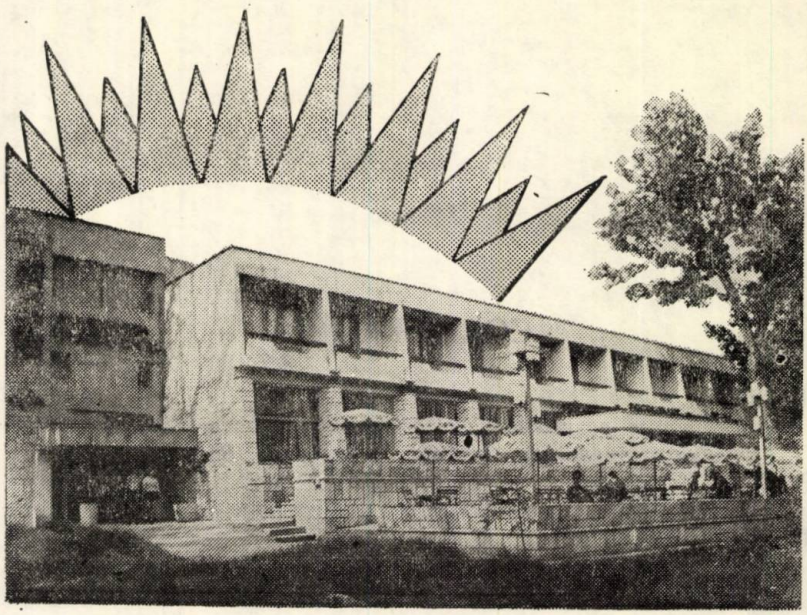
ЛЕТИЦИЯ ЗАХИУ, В. МАНОЛЕ
Оптимизация использования химических удобрений..... 69

Е. СТЭЙКУЦ, Ж. БАРХАНСКИЙ
Соображения по поводу проектирования интерфеиса для вычислительной сети 81

ФЛ. БОЯН
Метод сокращения и отметок для решения транспортной задачи 95

Критика и библиография

Научная информация



Hanul Monteoru

COOPERAŢIA DE CONSUM VĂ INVITĂ!

Amplasate în locuri pitoreşti, unităţile turistice ale cooperaţiei de consum oferă condiţii bune de găzduire. Ele dispun de camere confortabile şi de restaurante.

Pentru a veni în sprijinul celor interesaţi, dăm mai jos cîteva adrese:

— **Hanul Mărăşeşti** — din oraşul Mărăşeşti (în apropierea gării şi a parcului).

— **Hanul Soveja** — în staţiunea climatericâ Soveja — pe şoseaua Focşani—Panciu—Soveja, la km 75.

— **Hanul Suceviţa** — din localitatea Suceviţa, lîngă mănăstirea cu acelaşi nume, pe şoseaua Suceava—Rădăuţi—Suceviţa (D.N. 2 şi D.N. 17 A, km. 55).

— **Hanul Răreşoaia** — Hîrlău din oraşul cu acelaşi nume, pe drumul naţional Tg. Frumos—Hîrlău—Botoşani (D.N. 28 şi D.N. 28 B, km. 74, de la Iaşi).

— **Hanul Monteoru** — în staţiunea Sărata-Monteoru, pe şoseaua Ploieşti—Buzău (D.N. 1 B, km. 59, lateral în staţiunea Monteoru), la 20 km de Buzău.

COOP

Lei 15